

ТАУ. Практические занятия. Задания на контрольную работу и методические указания к ее выполнению.

Практическое занятие 1

АФЧХ, ЛАХ, переходные и весовые характеристики типовых динамических звеньев.

Большинство систем управления может быть представлено совокупностью динамических звеньев с передаточными функциями невысокого порядка. Такие звенья называются типовыми.

Типовым называется такое звено, которое описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка. К таким звеньям относятся:

- безынерционное звено – звено нулевого порядка,
- апериодическое звено – звено первого порядка,
- интегрирующее звено – звено первого порядка,
- дифференциальное звено – звено первого порядка,
- колебательное звено – звено второго порядка.

АФЧХ и ЛАХ апериодического звена

Апериодическое звено

Уравнение движения для безынерционного звена имеет вид

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{T}(K \cdot X - Y)$$

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Изображение переходной функции определяется как

$$h(s) = X(s) \cdot W(s) = \frac{1}{s} \times \frac{K}{1+T \cdot s}$$

Корни характеристического уравнения $D(s) = s^2 T + s = 0$ определяются как

$$q_1 = 0; \quad q_2 = \frac{1}{T}.$$

Выполняя обратное преобразование изображения переходной характеристики $h(s)$ получаем:

$$h(t) = \frac{K}{2Tp + 1} \Big|_{p=0} e^{0t} + \frac{K}{2Tp + 1} \Big|_{p=-1/T} e^{-t/T} = K \left(1 - e^{-t/T} \right).$$

Выполняя аналогичные преобразования над изображением весовой функции

$$w(s) = W(s)$$

получаем выражение для определения весовой функции $w(t)$.

$$w(t) = \frac{K}{T} \Big|_{p=-1/T} e^{-1/T} = \frac{K}{T} e^{-1/T}$$

Переходная и весовая характеристики звена приведены на рис. 1.

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j \cdot \omega T}$$

Исходя из этого, амплитудно-частотная характеристика звена определяется как:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}.$$

Вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ частотные характеристики звена определяются как

$$P(\omega) = \frac{K}{1 + (\omega T)^2}$$

$$Q(\omega) = -\frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

АФЧХ звена определяется как

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

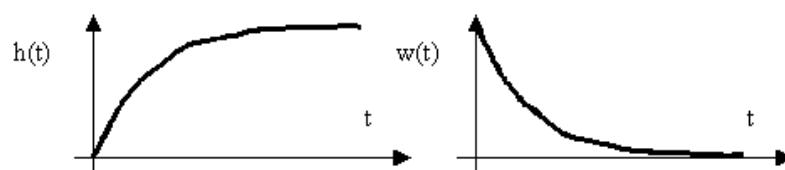


Рис.1

Выражение для расчета ЛАЧХ принимает вид:

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\frac{K}{1 + (\omega T)^2} \right).$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(-\omega T).$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ воспользуемся выражением вида:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg(K) & \text{при } \omega \ll \frac{1}{T} \\ 20 \lg(K) - 20 \lg(\omega T) & \text{при } \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}.$$

На рис.2 приведены амплитудно-фазовая и логарифмическая частотные характеристики безинерционного звена.

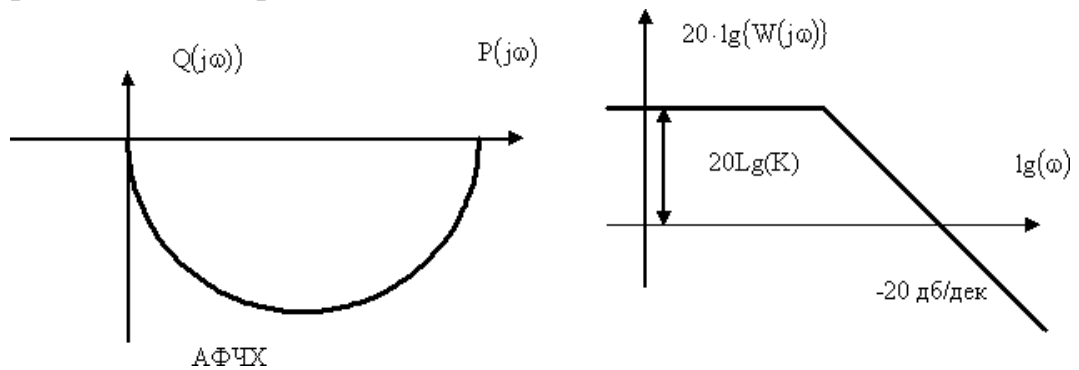


Рис. 2

Интегрирующее звено

Уравнение движения для интегрирующего звена имеет вид

$$\frac{dY}{dt} = K \times X$$

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = \frac{K}{s}$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Переходная характеристика звена определяется как

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s^2} \right\} = Kt$$

Весовая характеристика определяется как

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s} \right\} = K$$

Эти характеристики интегрирующего звена приведены на рис. 3

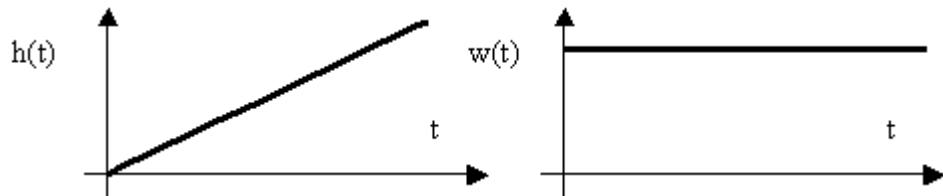


Рис. 3

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

Исходя из этого, амплитудно-частотная характеристика звена определяется как:

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega}$$

Вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ частотные характеристики звена определяются как

$$P(\omega) = 0$$

$$Q(\omega) = -\frac{K}{\omega}$$

Выражение для расчета ЛАЧХ принимает вид:

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\frac{K}{\omega} \right)$$

Частотные характеристики интегрирующего звена приведены на рис.4.

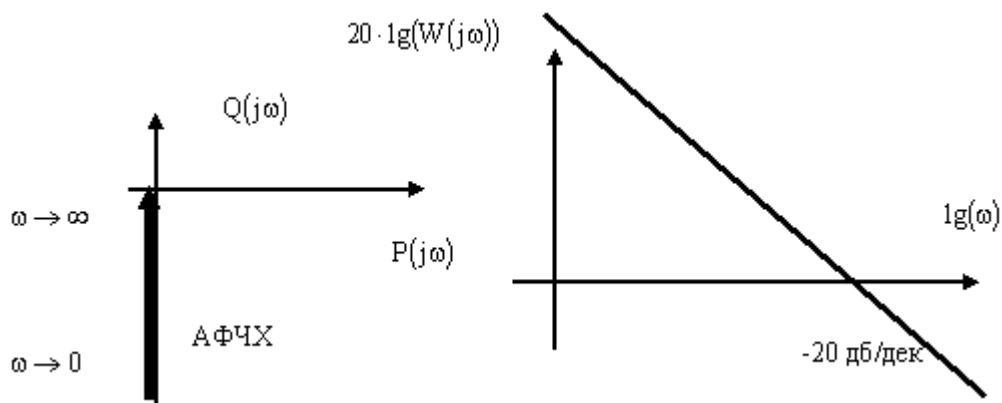


Рис. 4

Колебательное звено

Уравнение движения для колебательного звена имеет вид

$$T^2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dY}{dt} + Y = KX,$$

где T – постоянная времени звена,

ζ — коэффициент демпфирования.

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа, получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = \frac{K}{1 + 2\zeta Ts + T^2 s^2}$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Корни характеристического уравнения звена определяются как:

$$q_{1,2} = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2}$$

Для колебательного звена характерно различное распределение корней при разных комбинациях его параметров. В общем случае выражение переходная характеристика определяется выражением вида:

$$h(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t + \varphi) \right],$$

где $\alpha = \frac{\zeta}{T}$ — декремент затухания;

$\Omega_0 = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}$ — частота собственных колебаний;

$\varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$ — начальная фаза колебаний

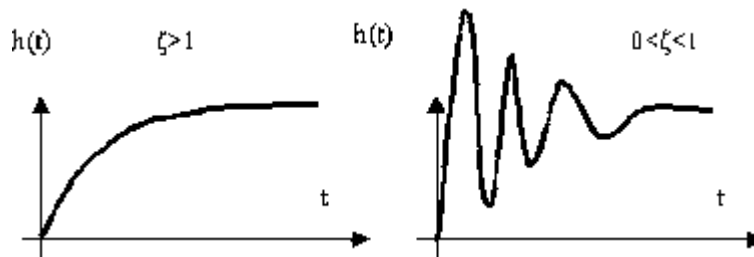


Рис. 5

Временные характеристики колебательного звена определяются распределением корней его характеристического полинома. На рис. 5 приведены переходные характеристики колебательного звена при действительных и комплексно-сопряженных корнях характеристического полинома.

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega 2\zeta T - \omega^2 T^2}$$

Исходя из этого, амплитудно-частотная характеристика колебательного звена определяется как:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 T^2\right)^2 + (2\zeta T \omega)^2}}$$

Вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ частотные характеристики звена определяются как

$$P(\omega) = \frac{K(1 - \omega^2 T^2)}{\left(1 - \omega^2 T^2\right)^2 + (2\zeta T \omega)^2},$$

$$Q(\omega) = -\frac{K \cdot 2\zeta T \omega}{\left(1 - \omega^2 T^2\right)^2 + (2\zeta T \omega)^2}$$

Выражение для расчета ЛАЧХ принимает вид:

$$L(\omega) = 20 \lg(A(\omega))$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ воспользуемся выражением вида:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg(K) & \text{при } \omega \ll \frac{1}{T} \\ 20 \lg(K) - 40 \lg(\omega T) & \text{при } \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

Амплитудно-фазовая и логарифмическая частотные характеристики звена показаны на рисунке 6.

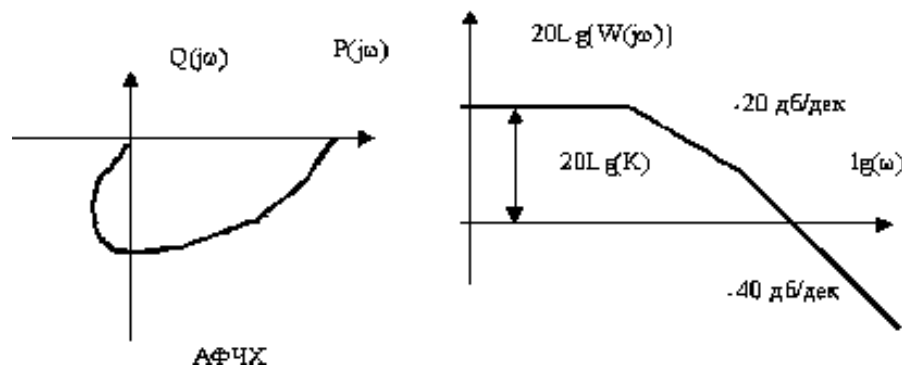


Рис.6

Рассмотрим численный пример.

Задана передаточная функция апериодического звена

$$K(p) = y(p)/x(p) = k/(Tp + 1)$$

$$K = 10, \quad T = 0,5 \text{ с}$$

Определить и построить АФХ, ФЧХ и переходную характеристику $h(t)$.

Решение

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j \cdot \omega T}$$

1) Амплитудно-частотная характеристика звена определяется как:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

Для нашего примера $A(\omega) = 10 / \sqrt{1 + (\omega \cdot 0,5)^2}$

Для построения АЧХ найдем характерные точки :

$$\text{При } \omega = \infty \quad A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 10 / \sqrt{1 + (\omega \cdot 0,5)^2} = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty$$

$$\text{при } \omega = 0 \quad A(\omega) = 10$$

$$\text{при } \omega = 1/T = 2 \text{ 1/c} \quad A(\omega) = 10/\sqrt{2} = 7,07$$

По рассчитанным значениям строится график АЧХ.

2) Фазо-частотная характеристика определяется как

$$\varphi(\omega) = \arctg Q(\omega)/P(\omega) = \arctg (-\omega T) = \arctg (-\omega 0,5)$$

Для построения ФЧХ найдем характерные точки:

$$\text{при } \omega = 0 \quad \varphi(\omega) = 0$$

$$\text{при } \omega = + 1/T = + 2 \text{ 1/c} \quad \varphi(\omega) = -\pi/4$$

$$\text{при } \omega = - 1/T = - 2 \text{ 1/c} \quad \varphi(\omega) = +\pi/4$$

$$\text{при } \omega = + \infty \quad \varphi(\omega) = -\pi/2$$

$$\text{при } \omega = - \infty \quad \varphi(\omega) = +\pi/2$$

По рассчитанным значениям строится график ФЧХ.

3) Переходная характеристика звена $h(t)$ в нашем случае – это реакция апериодического звена на единичную ступенчатую функцию $1(t)$.

Найдем изображение переходной характеристики

$$x(t) = 1(t) \quad x(s) = \frac{1}{s}, \quad W(s) = \frac{10}{(1+0,5s)}$$

$$h(s) = X(s) \cdot W(s) = \frac{1}{s} \times \frac{K}{1+T \cdot s}$$

$$\text{В нашем случае } h(s) = \frac{1}{s} \frac{10}{(1+0,5s)}$$

Характеристическое уравнение $0,5s^2 + s = 0$

Корни уравнения $s_1 = 0 \quad s_2 = - 2$

Выполняя обратное преобразование изображения переходной характеристики $h(s)$ получаем в общем виде для апериодического звена

$$h(t) = \frac{K}{2Tp + 1} \Big|_{p=0} e^{0t} + \frac{K}{2Tp + 1} \Big|_{p=-1/T} e^{-t/T} = K \left(1 - e^{-t/T} \right)$$

Для конкретного числового примера

$$h(t) = 10(1 - \exp(-2t))$$

Практическое занятие 2

2.1 Устойчивость линейных непрерывных систем управления

Вычисление корней уравнения, особенно высокой степени, затруднительно. Поэтому были разработаны критерии, позволяющие делать заключение об устойчивости системы без определения корней характеристического уравнения.

Различают два вида критериев устойчивости:

- 1) алгебраические;
- 2) частотные.

Критерии первого вида формируют ограничения на коэффициенты характеристического уравнения. Критерии второго вида базируются на анализе прохождения частотных характеристик замкнутой или разомкнутой системы.

Алгебраические критерии устойчивости

Среди алгебраических критериев непрерывных систем наибольшее применение получил критерий Гурвица.

Критерий Гурвица

Из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы $a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n = 0$ составляется таблица, называемая матрицей Гурвица по следующему правилу:

- 1) по диагонали сверху вниз записываются все коэффициенты, начиная с a_1 до a_n в порядке возрастания индексов;
- 2) столбцы дополняются вверх коэффициентами с возрастающими индексами, вниз коэффициентами с убывающими индексами;

3) на месте коэффициентов с индексами больше n и меньше нуля проставляются нули.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Сам критерий формулируется следующим образом: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ были положительными n главных диагональных определителя матрицы Гурвица.

Главные определители матрицы Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \text{ и так далее.}$$

Частные случаи.

1. Система 1-го порядка, характеристическое уравнение которой $a_0s + a_1 = 0$, устойчива, если $a_0 > 0$ и $a_1 > 0$, т. е. Если оба коэффициента характеристического уравнения положительны.

2. Система 2-го порядка (характеристическое уравнение $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$) устойчива, если $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ и $a_1a_2 > 0$, т. е. Если все три коэффициента положительны.

3. Положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым, но недостаточным условием устойчивости системы любого порядка.

4. Наличие хотя бы одного отрицательного коэффициента является признаком неустойчивого состояния системы.

5. Равенство нулю свободного коэффициента $a_n = 0$, означает, что система находится на границе устойчивости.

6. Равенство нулю любого другого коэффициента свидетельствует либо о неустойчивости системы, либо о нахождении ее на границе устойчивости.

Критерий Гурвица удобен не только для проверки устойчивости замкнутой системы. С его помощью легко выясняется влияние того или иного параметра системы на ее устойчивость, а также легко определяются границы значений параметра, в которых система остается устойчивой.

Рассмотрим пример

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$K(p) = K_v / p(1+T_1p)(1+T_2p) = B(p)/A(p)$$

Найдем передаточную функцию замкнутой системы

$$W(p) = B(p)/(A(p)+B(p)) = K_v / (p(1+T_1p)(1+T_2p) + K_v)$$

Характеристический полином замкнутой системы

$$C(p) = p(1+T_1p)(1+T_2p) + K_v = T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + k_v$$

Обозначим $T_1T_2 = C_3$, $(T_1+T_2) = C_2$, $1 = C_1$, $k_v = C_0$

Составим определитель Гурвица

$$\begin{vmatrix} C_2 & C_0 & 0 \\ C_3 & C_1 & 0 \\ 0 & C_2 & C_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1+T_2 & K_v & 0 \\ T_1T_2 & 1 & 0 \\ 0 & T_1+T_2 & K_v \end{vmatrix}$$

Вычислим диагональные миноры при $T_1 = 0,2$ с, $T_2 = 0,02$ с, $K_v = 20$ 1/с.

$$\Delta_1 = T_1+T_2 = 0,22 \text{ с}, \quad \Delta_2 = C_2C_1 - C_3C_0 = (T_1+T_2)1 - T_1T_2 K_v = 0,22 \cdot 1 - 0,004 \cdot 20 = 0,22 - 0,08 = 0,14, \quad \Delta_3 = C_0 \cdot \Delta_2 = 20 \cdot 0,14 = 2,8.$$

Так как $C_3 > 0$, и все диагональные миноры больше нуля, то рассматриваемая система устойчива.

2.2. Оценка точности САУ в установившихся режимах

2.2.1. Точность САУ в режиме стабилизации

Среди типовых режимов работы САУ простейшим, но и широко используемым в технике и технологии режимом является работа при постоянной величине управляющего воздействия или просто стабилизация. Основная задача системы стабилизации – поддержание регулируемой величины на заданном постоянном уровне в условиях существования возмущающих воздействий.

В этом параграфе мы оценим ошибки системы в режиме стабилизации, когда и управляющее и возмущающее воздействия имеют ступенчатую форму. В качестве объекта исследования примем одноконтурную систему с возмущающим воздействием f , приложенным в середине прямого канала системы (рис. 4.15). Рассмотрим три варианта состава звеньев в прямом канале системы:

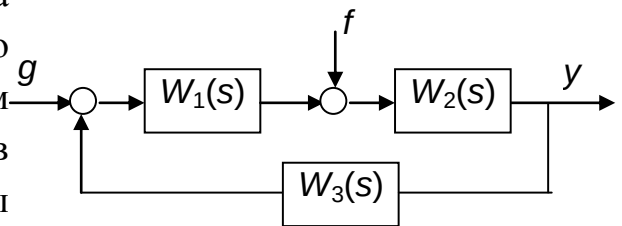


Рис. 4.15

- 1) все звенья являются позиционными;
- 2) в составе $W_2(s)$ есть хотя бы одно интегрирующее звено;
- 3) в составе $W_1(s)$ есть хотя бы одно интегрирующее звено.

Позиционными будем называть звенья безинерционные $W_i(s) = k_i$ или динамические звенья 1-го и 2-го порядка, свободные члены передаточных функций которых равны единице. Например, $W_i(s) = k_i / (T_i s + 1)$, $W_i(s) = k_i (T_i s + 1)$, $W_i(s) = k_i / (T_i^2 s^2 + 2\epsilon T_i s + 1)$ и их комбинации $W_i(s) = k_i \frac{Q_i(s)}{P_i(s)}$, где $Q_i(s)$ и $P_i(s)$ полиномы со свободными членами равными единице.

Итак, первый вариант – все звенья прямого канала позиционные. Канал обратной связи во всех случаях будет приниматься позиционным. Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \prod_{i=1}^n k_i \frac{Q_i(s)}{P_i(s)} = k W'(s),$$

где $k = k_1 k_2 \dots k_n$ – общий коэффициент передачи разомкнутой системы; $W'(s)$ – рациональная дробь при $s = 0$ равная единице.

Пусть на систему действует только управляющее воздействие $g(t) = g_0 1(t)$ ступенчатой формы. Тогда установившееся значение ошибки от управляющего воздействия

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s E_g(s),$$

$$\text{где } E_g(s) = G(s)\Phi_g(s) = \frac{g_0}{s} \frac{1}{1+W(s)} = \frac{g_0}{s} \frac{1}{1+kW(s)}.$$

Окончательно

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s \frac{g_0}{s} \frac{1}{1+kW'(s)} = \frac{g_0}{1+k}.$$

Таким образом, система, состоящая только из позиционных звеньев, отрабатывает ступенчатое управляющее воздействие с ошибкой, пропорциональной величине воздействия g_0 и обратно пропорциональной (с точностью до единицы) общему коэффициенту передачи разомкнутой системы.

Пусть теперь на систему действует возмущение ступенчатой формы $f(t) = f_0 1(t)$. Установившееся значение ошибки от возмущения

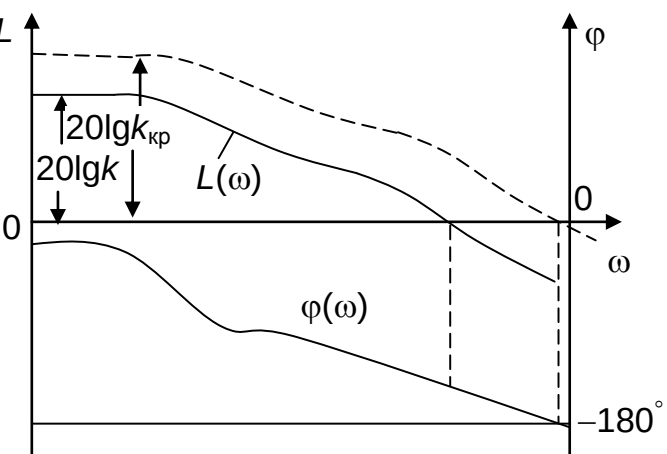
$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s E_f(s),$$

$$\text{где } E_f(s) = F(s)\Phi_f(s). \text{ Здесь } E_f(s) = f_0/s, \Phi_f = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1+kW'(s)} = \frac{k_2W_2'(s)k_3W_3'(s)}{1+kW'(s)}.$$

Подставляя в общую формулу, имеем

$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_0}{s} \frac{k_2W_2'(s)k_3W_3'(s)}{1+kW'(s)} = f_0 \frac{k_2k_3}{1+k}.$$

Итак, система, состоящая только из позиционных звеньев, имеет ошибки, определяемые как управляющим, так и возмущающим воздействием. Обе составляющие ошибки обратно пропорциональны (с точностью до



единицы) общему коэффициенту передачи разомкнутой системы k . Чем больше k , тем меньше ошибки. Увеличение k в рассматриваемой системе возможно только до определенного значения, называемого критическим $k_{кр}$, при котором система будет находиться на границе устойчивости как это показано на рисунке.

Второй вариант: в составе звеньев, описываемых передаточной функцией $W_2(s)$, есть интегрирующее звено

$$W_2(s) = \frac{k_2}{s} \frac{Q_2(s)}{P_2(s)},$$

где $\lim_{s \rightarrow 0} Q_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} P_2(s) = 1$.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{k}{s} W'(s),$$

где $\lim_{s \rightarrow 0} W'(s) = 1$.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от управляющего воздействия

$$\Phi_g(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k}{s} W'(s)} = \frac{s}{s + kW'(s)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия

$$\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1 + W(s)} = \frac{\frac{k_2}{s} \frac{Q_2(s)}{P_2(s)} k_3 W'_3(s)}{1 + \frac{k}{s} W'(s)} = \frac{k_2 k_3 W'_2(s) W'_3(s)}{s + kW'(s)}.$$

Ошибка установившегося режима по управляющему воздействию

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s E_g(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{g_0}{s} \frac{s}{s + kW'(s)} = 0.$$

Ошибка установившегося режима по возмущающему воздействию

$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s E_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_0}{s} \frac{k_2 W_2'(s) k_3 W_3'(s)}{1 + k W'(s)} = f_0 \frac{k_2 k_3}{1 + k} = \frac{f_0}{k_1}.$$

Таким образом, система, имеющая в прямом канале интегрирующее звено, расположенное после точки приложения возмущающего воздействия, обеспечивает отсутствие ошибки от ступенчатого управляющего воздействия и имеет постоянную ошибку, обусловленную ступенчатым возмущающим воздействием.

Третий вариант: интегрирующее звено включено в группу звеньев, описываемых передаточной функцией $W_1(s)$, т. е. $W_1(s) = \frac{k_1}{s} \frac{Q_1(s)}{P_1(s)}$, где $Q_1(s) = P_1(s) = 1$.

Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{k}{s} W'(s).$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от управляющего воздействия

$$\Phi_g(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + k/s W'(s)} = \frac{s}{s + k W'(s)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия

$$\Phi_f = \frac{W_2(s) W_3(s)}{1 + k W(s)} = \frac{k_2 W_2'(s) k_3 W_3'(s)}{1 + k/s W'(s)} = \frac{s k_2 W_2'(s) k_3 W_3'(s)}{s + k W'(s)}.$$

Ошибка установившегося режима по управляющему воздействию ступенчатой формы

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s \frac{g_0}{s} \frac{s}{s + k W'(s)} = 0.$$

Ошибка установившегося режима по возмущающему воздействию ступенчатой формы

$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s \frac{f_0}{s} \frac{sk_2 W_2'(s) k_3 W_3'(s)}{s + k W'(s)} = 0.$$

Таким образом, система, содержащая интегрирующее звено в прямом канале, расположенное до точки приложения возмущающего воздействия, не имеет ошибок как от управляющего, так и от возмущающего воздействий ступенчатой формы.

Система, имеющая интегрирующее звено в прямом канале, называется астатической системой 1-го порядка.

Астатическая система 1-го порядка воспроизводит ступенчатое управляющее воздействие без ошибки в установившемся режиме и полностью подавляет ступенчатое возмущающее воздействие, если оно действует в прямом канале после интегрирующего звена.

Вот почему интегральный или пропорционально-интегральные регуляторы ставятся всегда вначале прямого канала сразу после узла сравнения.

2.2.2.. Установившиеся ошибки при обработке

медленно меняющихся внешних воздействий

(коэффициенты ошибок)

Под медленно меняющимися внешними воз Под медленно меняющимися внешними воздействиями мы будем понимать сигналы, описываемые степенными временными рядами

$$g(t) = (g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_l t^l) 1(t).$$

В эту группу воздействий входят почти все типовые воздействия, принятые в ТАУ для анализа и синтеза систем управления. В частности, первое слагаемое $g(t) = g_0 1(t)$ – ступенчатое воздействие; второе слагаемое $g(t) = g_0 t 1(t)$ – скоростное (линейное) воздействие; третье слагаемое $g(t) = g_0 t^2 1(t)$ – параболическое (квадратичное) воздействие.

Для установившейся ошибки воспроизведения медленно меняющихся воздействий было получено специальное выражение, имеющее для непрерывных систем следующую форму

$$e_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots + C_i \frac{1}{i!} \frac{d^i g(t)}{dt^i},$$

$t \rightarrow \infty$

где $C_0, C_1, C_2, \dots, C_i$ – коэффициенты ошибок, определяемые по выражению

$$C_i = \left[\frac{d^i \Phi_{eg}(s)}{ds^i} \right]_{s=0}.$$

Так $C_0 = [\Phi_{eg}(s)]_{s=0}$; $C_1 = \left[\frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds} \right]_{s=0}$, где $\Phi_{eg}(s)$ – передаточная функция

замкнутой системы по ошибке от воздействия $g(t)$. На практике значения коэффициентов ошибок для $i > 2$ определяют по формулам, приведенным в справочнике. Для $i = 0, 1, 2$ коэффициенты можно определять непосредственно по вышеприведенным формулам.

Используя выражение для установившейся ошибки через коэффициенты ошибок, найдем значение коэффициентов ошибок при отработке непрерывной системой типовых воздействий: $g(t) = g_0(t)$; $g(t) = g_0 t$; $g(t) = g_0 t^2$.

1. Система статическая (порядок астатизма $\nu = 0$), воздействие ступенчатое $g(t) = g_0 1(t)$.

Установившаяся ошибка при отработке ступенчатого воздействия

$$e_g(t) = C_0 g(t) = C_0 g_0.$$

$t \rightarrow \infty$

Заметим, что другие слагаемые выражения ошибки, содержащие производные от $g(t)$ по времени будут равны нулю, так как $\frac{d^i g(t)}{dt^i} = 0$ при $i > 0$.

Коэффициент ошибки

$$C_0 = [\Phi_{eg}(s)]_{s=0} = \left[\frac{1}{1 + kW'(s)} \right]_{s=0} = \frac{1}{1 + k},$$

так как $W'(s) = 1$ и значение установившейся ошибки $e_g(t) = \frac{1}{1 + k} g_0$. Итак,

$t \rightarrow \infty$

$$C_0 = \frac{1}{1 + k}.$$

2. Система астатическая 1-го порядка ($\nu = 1$).

Воздействие линейное $g(t) = g_0 t 1(t)$.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1}{1 + k/s W'(s)} = \frac{s}{s + kW'(s)}.$$

Установившаяся ошибка при обработке линейного воздействия

$$e_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} = C_0 g_0 t + C_1 g_0.$$
$$t \rightarrow \infty$$

$$C_0 = [\Phi_{eg}(s)]_{s=0} = \left[\frac{s}{s + kW'(s)} \right]_{s=0} = 0,$$

$$C_1 = \left[\frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds} \right]_{s=0} = \left[\frac{d}{ds} \frac{s}{s + kW'(s)} \right]_{s=0} = \frac{1}{k};$$

$$C_1 = \frac{1}{k}$$

Установившееся значение ошибки $e_g(t) = \frac{g_0}{k}$. Ошибка при обработке

$$t \rightarrow \infty$$

линейного внешнего воздействия называется скоростной ошибкой. Она пропорциональна скорости изменения воздействия g_0 и обратно пропорциональна общему коэффициенту усиления разомкнутой астатической системы 1-го порядка, который называется добротностью системы по скорости.

3. Система астатическая 2-го порядка ($\nu = 2$).

Воздействие параболическое $g(t) = g_0 t^2$.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1}{1 + k/s^2 W'(s)} = \frac{s^2}{s^2 + kW'(s)}.$$

Установившаяся ошибка при обработке параболического воздействия

$$e_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = C_0 g_0 t^2 + 2g_0 t C_1 + C_2 g_0.$$
$$t \rightarrow \infty$$

Коэффициенты ошибок

$$C_0 = [\Phi_{eg}(s)]_{s=0} = \left[\frac{s^2}{s^2 + kW'(s)} \right]_{s=0} = 0,$$

$$C_1 = \left[\frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds} \right]_{s=0} = \left[\frac{d}{ds} \frac{s^2}{s^2 + kW'(s)} \right]_{s=0} = 0;$$

$$C_2 = \left[\frac{d^2\Phi_{eg}(s)}{ds^2} \right]_{s=0} = \left[\frac{d^2}{ds^2} \frac{s^2}{s^2 + kW'(s)} \right]_{s=0} = \frac{1}{k}.$$

Установившееся значение ошибки $e_g(t) = \frac{g_0}{k}$.

Ошибка при обработке параболического внешнего воздействия называется ошибкой по ускорению. Она пропорциональна ускорению внешнего воздействия g_0 и обратно пропорциональна общему коэффициенту передачи разомкнутой астатической системы 2-го порядка, который называется добротностью системы по ускорению.

2.2.3. Анализ влияния порядка астатизма

системы на установившиеся ошибки

при обработке типовых степенных воздействий

Обобщая приведенный анализ установившихся ошибок в системах различного порядка астатизма при обработке ступенчатых и медленно меняющихся воздействий, получим общие выражения установившихся ошибок в функции порядка астатизма и степени внешнего воздействия.

Пусть управляющее воздействие имеет форму $g(t) = \frac{g_0}{m!} t^m$, и изображения по Лапласу $G(s) = \frac{g_0}{s^{m+1}}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Изображение ошибки при таком воздействии

$$E_g(s) = G(s)\Phi_{eg}(s) = \frac{g_0}{s^{m+1}} \frac{1}{1+W(s)}.$$

Установившееся значение ошибки

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sE_g(s) = \lim_{s \rightarrow 0} g_0 \frac{1}{s^m [1+W(s)]}.$$

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s^v} W'(s),$$

где k – общий коэффициент передачи системы; v – порядок астатизма системы;

$W'(s)$ – передаточная функция, не содержащая нулевых полюсов.

Тогда установившееся значение ошибки

$$e_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g_0 s^{v-m}}{s^v + k W'(s)}.$$

Отсюда видно, что $e_g(t) = 0$ только при $v > m$, т. е. порядок астатизма системы v должен быть больше степени m воздействия.

При $\square = m$ установившаяся ошибка имеет постоянную величину $e(t) = \frac{g_0}{k}$, что означает, что системы с астатизмом 1-го и 2-го порядка будут иметь постоянные ошибки при отработке линейного и квадратичного воздействий соответственно.

При $\square = m = 0$ $e(t) = \frac{g_0}{1+k}$. Это ошибка системы с $\square = 0$ при отработке ступенчатого воздействия.

И, наконец, при $v < m$ $e(t) = \infty$. Так система, не имеющая интеграторов, будет иметь бесконечную ошибку уже при воздействии $g(t) = g_0 t$, т. е. при $m = 1$.

Сделанные выводы полностью справедливы и для дискретно непрерывной системы подобной структуры (одноконтурной). В табл. 4.2 сведены установившиеся ошибки систем (непрерывных и дискретно непрерывных) различного порядка астатизма при обработке внешних воздействий степенной формы.

Таблица 4.2

Порядок астатизма системы	Внешнее воздействие		
	Ступенчатое $g(t) = g_0 1(t)$	Линейное $g(t) = g_0 t 1(t)$	Квадратичное $g(t) = g_0 t^2 1(t)$
$\nu = 0$	$\left. \begin{matrix} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} = \frac{g_0}{1+k}$	$\left. \begin{matrix} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} = \infty$	$\left. \begin{matrix} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} = \infty$
$\nu = 1$	$\left. \begin{matrix} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} = 0$	$\left. \begin{matrix} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} = \frac{g_0}{k}$	$\left. \begin{matrix} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} = \infty$
$\nu = 2$	$\left. \begin{matrix} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} = 0$	$\left. \begin{matrix} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} = 0$	$\left. \begin{matrix} e(t) \\ t \rightarrow \infty \\ e(n) \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} = \infty$

Из таблицы можно извлечь следующие выводы:

1) Система с астатизмом $\nu = 0$ (статическая система) не способна воспроизводить линейные и квадратичные сигналы и поэтому не используются как следящая или программного управления;

2) Система с астатизмом 1-го порядка ($\nu = 1$) способна работать как СПУ;

3) Система с астатизмом 2-го порядка ($\nu = 2$) обеспечивает точное воспроизведение ступенчатых и линейных сигналов и может обрабатывать квадратичные воздействия с постоянной ошибкой; может работать в режиме слежения.

Что касается установившейся ошибки от возмущающего воздействия степенной формы, то ее значение зависит не только от соотношения порядка астатизма системы и степени воздействия, но и от распределения интегрирующих звеньев между регулятором и объектом управления, т. е. зависит от точки приложения возмущающего воздействия в системе.

Пусть регулятор содержит l_p , а объект управления l_0 интеграторов. Тогда порядок астатизма системы $\nu = l_p + l_0$.

ПФ замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия (рис. 3.22)

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W(s)} = \frac{k_0 / s^{l_0} W_2'(s)}{1 + \frac{k}{s^\nu} W'(s)},$$

где $W(s) = W_1(s) W_2(s) W_3(s)$; причем $W_1(s) = \frac{k_p}{s^{l_p}} W_1'(s)$, $W_2(s) = \frac{k_0}{s^{l_0}} W_2'(s)$,

$W_3(s) = k_3 W_3'(s)$; $W_1'(s)$, $W_2'(s)$, $W_3'(s)$ – передаточные функции, не имеющие нулевых полюсов.

$$\text{Тогда } \Phi_{ef}(s) = \frac{k_0 s^{\nu-l_0} W_2'(s)}{s^\nu + k W'(s)} = \frac{k_0 s^{l_0} W_2'(s)}{s^\nu + k W'(s)}.$$

Установившееся значение ошибки от возмущающего воздействия степенной формы $f(t) = \frac{f_0}{k!} t^k$, $F(s) = \frac{f_0}{s^{k+1}}$.

$$e_f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s E_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{f_0}{s^{k+1}} \frac{k_0 s^{l_p} W_2'(s)}{s^\nu + k W'(s)} = f_0 k_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{l_p-k} W_2'(s)}{s^\nu + k W'(s)}.$$

Полученное выражение позволяет сделать следующие выводы:

1. установившееся значение ошибки от возмущающего воздействия определяется соотношением числа интеграторов в регуляторе и степени воздействия и не зависит от числа интеграторов объекта управления;

2. отсутствие интеграторов в регуляторе вызывает ошибку $e_f(\infty) = f_0 k_0 / (1 + k)$ при $k = 0, \nu = 0$; $e_f(\infty) = f_0 / k_p$ при $k = 0, \nu \neq 0$; $e_f = \infty$ при $k \geq 1$;

3. наличие интеграторов в регуляторе позволяет иметь $e_f(\infty) = 0$ при $l_p > k$; $e_f(\infty) = f_0 / k_p$ при $l_p = k$; $e_f(\infty) = \infty$ при $l_p < k$.

Таким образом, размещения интеграторов в регуляторе до точки приложения возмущения позволяет свести к нулю ошибки установившегося режима, выбирая число интеграторов больше степени возмущающего воздействия.

Эти выводы справедливы и для дискретно непрерывной системы, в которой возмущающие воздействия приложены после регулятора.

Рассмотрим пример

На САУ с разомкнутой передаточной функцией $K(p) = K_v / p(Tp + 1)$ действует управляющий сигнал $g(t) = g_0 t^1(t)$. Определить ошибку в установившемся режиме.

$$K_v = 20 \text{ л/с}, \quad g_0 = 5 \text{ }^0/\text{с}, \quad T = 0,1 \text{ с}.$$

Решение

Определяем порядок астатизма системы $\nu = 1$.

Для установившейся ошибки воспроизведения медленно меняющихся управляющих воздействий было получено выражение, имеющее для непрерывных систем следующую форму

$$e_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots + C_i \frac{1}{i!} \frac{d^i g(t)}{dt^i},$$

где $C_0, C_1, C_2, \dots, C_i$ – коэффициенты ошибок, определяемые по выражению

$$C_i = \left[\frac{d^i \Phi_{eg}(s)}{ds^i} \right]_{s=0}.$$

Для линейно-изменяющегося воздействия в нашем примере

$$e_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} = C_0 g_0 t + C_1 g_0.$$

$t \rightarrow \infty$

При $\nu = 1$ $C_0 = 0$, $C_1 = 1/K_\nu$

$$e_g(t) = C_1 g_0 = 5/20 = 0,25^0$$

Задания на контрольную работу и методические указания по ее выполнению

В данной методической работе приведены задания на одну контрольную работу, которая состоит из трех задач с методическими указаниями к их выполнению.

Текст контрольной работы можно выполнять либо шариковой ручкой (или чернилами), либо с помощью компьютера, оставляя поля для пометок преподавателя. Все графические работы могут быть выполнены в карандаше на миллиметровой бумаге, либо с помощью компьютера. Расчетные формулы сначала следует писать в общем виде, а затем подставлять в них цифровые значения, указывая размерность полученного результата. Выбранные величины необходимо кратко обосновать.

При заимствовании расчетных формул, методов расчета и т. п. следует сделать ссылку на использованную литературу с указанием страницы и номера формулы. В конце работы нужно привести перечень использованной литературы, указав автора книги, название, место издательства и год издания.

Если контрольная работа оказывается не зачтенной и требуется ее повторное рецензирование, то необходимо представлять вместе с исправленной или переделанной работой первоначально выполненную работу со всеми замечаниями рецензента. Стирать или заклеивать замечания не разрешается.

Задание 1

Задана передаточная функция апериодического звена

$$K(p) = y(p)/x(p) = k/(T_p + 1)$$

Параметры звена K и T для разных вариантов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Посл. цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
T, c	0,4	0,3	0,2	0,5	0,1	0,4	0,3	0,2	0,5	0,1
K	6	4	8	10	12	8	6	15	12	10

Определить и построить АФХ, ФЧХ и переходную характеристику $h(t)$.

Методические указания к выполнению задания 1 изложены в разделе практических занятий 1: **АФЧХ, ЛАХ, переходные и весовые характеристики типовых динамических звеньев.**

Задание 2

Задана передаточная функция разомкнутой системы управления

$$K(p) = K_v/p(1+T_1p)(1+T_2p) = B(p)/(A(p))$$

Оценить устойчивость системы по критерию Гурвица.

Параметры передаточной функции приведены в таблице 2.

Таблица 2

Посл. цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$K_v, 1/c$	20	15	30	12	20	16	18	24	22	14
T_1, c	0,1	0,5	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	0,2	0,1	0,5
T_2, c	0,04	0,02	0,01	0,05	0,02	0,03	0,04	0,02	0,03	0,04

Методические указания к выполнению задания 2 изложены в разделе практических занятий 2.1: **Устойчивость линейных непрерывных систем управления.**

Задание 3

На САУ с разомкнутой передаточной функцией $K(p) = K_v/p(Tp + 1)$ действует управляющий сигнал $g(t) = g_0 t 1(t)$. Определить ошибку в установившемся режиме.

Параметры передаточной функции и параметры управляющего сигнала приведены в таблице 3.

Таблица 3

Посл. цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$K_v, 1/c$	30	20	10	15	20	10	16	24	18	25
$g_0, ^\circ/c$	15	10	5	6	8	4	12	16	14	18

Методические указания к выполнению задания 3 изложены в разделе практических занятий 2.2.2: **Установившиеся ошибки при отработке медленно меняющихся внешних воздействий.**

Пример решения подобной задачи приведен в конце раздела 2.2.3.