Задание 1.15. Найти произведение приближенных чисел и указать его погрешности (Δ и δ), если считать в исходных данных все значащие цифры верными.

$$33{,}8\cdot(-12{,}55)\cdot 2{,}3$$

Решение.

По условию:

$$a=33{,}8,\ b=-12{,}55,\ c=2{,}3,\ \Delta_a=0{,}1,\ \Delta_b=0{,}01,\ \Delta_c=0{,}1.$$

Вычисляем:

$$S=abc=33{,}8\cdot(-12{,}55)\cdot 2{,}3=-975{,}637.$$

По формуле Лагранжа абсолютная погрешность вычисляется по формуле:

$$\Delta_S=\Delta_a\left|S'_a(a,b,c)\right|+\Delta_b\left|S'_b(a,b,c)\right|+\Delta_c\left|S'_c(a,b,c)\right|=$$

$$=\Delta_a|bc|+\Delta_b|ac|+\Delta_c|ab|=$$

$$=0{,}1\cdot 12{,}55\cdot 2{,}3+0{,}01\cdot 33{,}8\cdot 2{,}3+0{,}1\cdot 33{,}8\cdot 12{,}55\approx 46{,}0829.$$

Относительная погрешность:

$$\delta_S=\frac{\Delta_S}{|S|}\cdot 100\%=\frac{46{,}0829}{975{,}637}\cdot 100\%\approx 4{,}72\%.$$

Ответ. $\Delta_S\approx 46{,}0829$, $\delta_S\approx 4{,}72\%$.

Задание 2.15. Найти решение СЛАУ $AX = B$, где A – матрица коэффициентов, B – вектор свободных членов, X – вектор неизвестных, ***методом квадратного корня***. Заданы матрица A и вектор B. При поиске решения (в MathCAD) показать все промежуточные вычисления в прямом и обратном ходе указанных прямых методов. Полученное (приближенное) решение сравнить с решением этой СЛАУ в MathCAD вычислительным блоком Given…find (расчет провести в численном виде). Зарисовать блок-схему алгоритма указанного в варианте метода решения СЛАУ при условии произвольного количества уравнений (задаются матрица A и вектор B).

$$A = \begin{pmatrix} 33 & 59 & 17 \\ 59 & 90 & 34 \\ 17 & 34 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Решение.

Решение задачи в MathCAD с помощью блока Given..Find:

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0$

Given

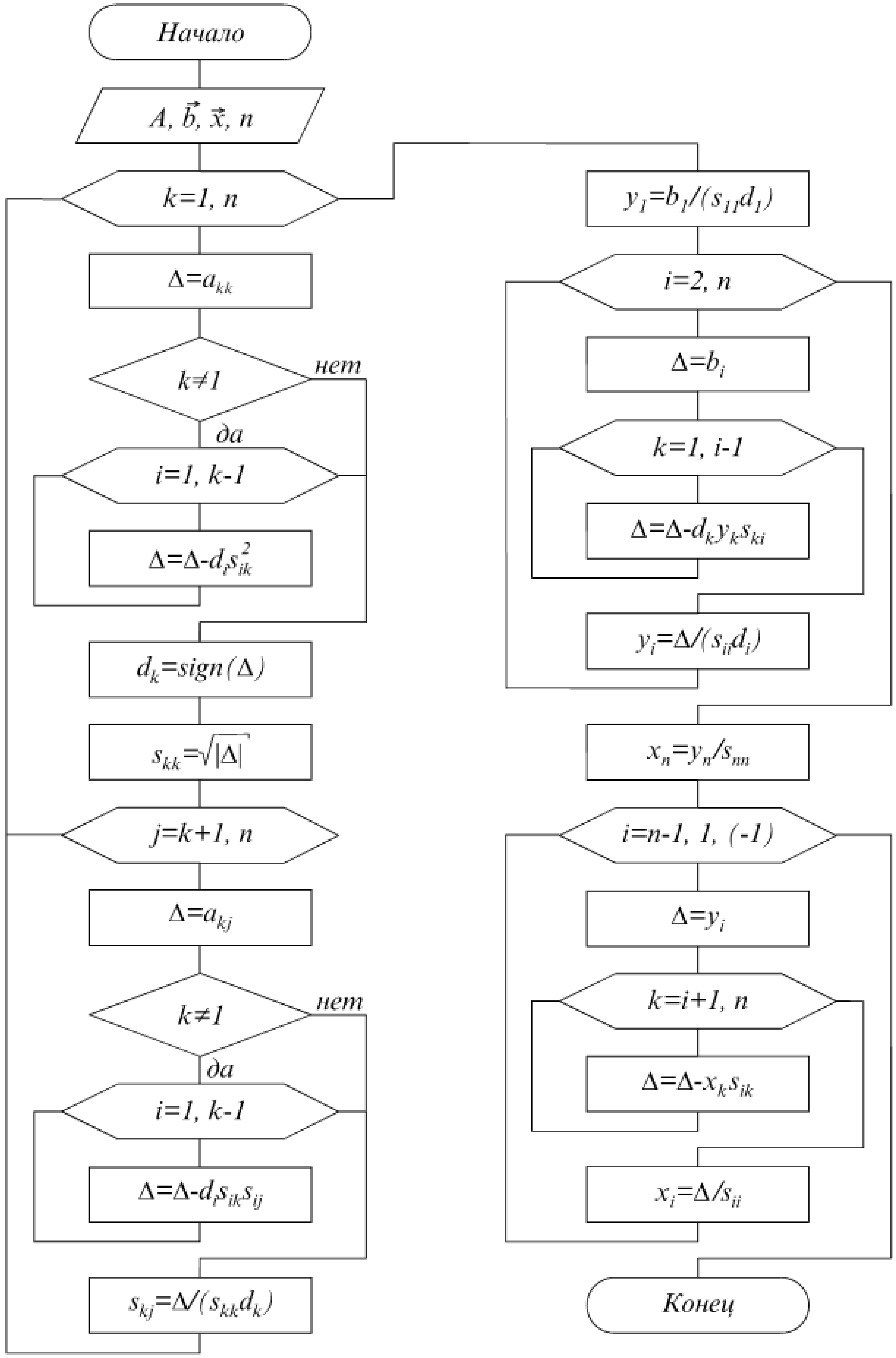
$33 \cdot x1 + 59 \cdot x2 + 17 \cdot x3 = 11$

$59 \cdot x1 + 90 \cdot x2 + 34 \cdot x3 = 33$

$17 \cdot x1 + 34 \cdot x2 + 11 \cdot x3 = 22$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} -4.002 \\ 0.608 \\ 6.307 \end{pmatrix}$$

Блок-схема алгоритма – решение СЛАУ методом квадратного корня:



Последовательность вычислений:

$ORIGIN := 1 \qquad n := 3$

$$A := \begin{pmatrix} 33 & 59 & 17 \\ 59 & 90 & 34 \\ 17 & 34 & 11 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} -4.0019 \\ 0.6076 \\ 6.3067 \end{pmatrix}$$

Вычисляем матрицы D, S:

```
H(A) := | for k ∈ 1..n
        |   | Δ ← A_{k,k}
        |   | for i ∈ 1..k − 1        if k ≠ 1
        |   |   Δ ← Δ − D_i·(S_{i,k})^2
        |   | D_k ← sign(Δ)
        |   | S_{k,k} ← √|Δ|
        |   | for j ∈ k + 1..n                      if k < n
        |   |   | Δ ← A_{k,j}
        |   |   | for i ∈ 1..k − 1       if k ≠ 1
        |   |   |   Δ ← Δ − D_i·S_{i,k}·S_{i,j}
        |   |   | S_{k,j} ← Δ / (S_{k,k}·D_k)
        | M ← augment(S, D)
        | M
```

$S := \mathrm{submatrix}(H(A), 1, 3, 1, 3)$

$D := H(A)^{\langle 4 \rangle}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 5.745 & 10.271 & 2.959 \\ 0 & 3.935 & -0.916 \\ 0 & 0 & 1.756 \end{pmatrix}$$

```
y := | z_1 ← B_1 / (S_{1,1}·D_1)
     | for i ∈ 2..n
     |   | Δ ← B_i
     |   | for k ∈ 1..i − 1
     |   |   Δ ← Δ − D_k·z_k·S_{k,i}
     |   | z_i ← Δ / (S_{i,i}·D_i)
     | z
```

$$y = \begin{pmatrix} 1.915 \\ -3.388 \\ 11.072 \end{pmatrix}$$

$$x := \left| \begin{array}{l} x_n \leftarrow \dfrac{y_n}{S_{n,n}} \\ \text{for } i \in n-1, n-2 .. 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \Delta \leftarrow y_i \\ \text{for } k \in i+1 .. n \\ \quad \Delta \leftarrow \Delta - x_k \cdot S_{i,k} \\ x_i \leftarrow \dfrac{\Delta}{S_{i,i}} \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

$$x = \begin{pmatrix} -4.002 \\ 0.608 \\ 6.307 \end{pmatrix}$$

Задание 3.15. По заданным узловым значениям исходной функции (векторы X и Y) осуществить интерполяцию – интерполяционным полиномом Ньютона $Nn(x) - назад$.

Построить в MathCAD в одном графическом шаблоне полученный интерполяционный полином и узловые значения исходной функции.

Зарисовать блок-схему алгоритма, реализующего вычисление значения интерполяционного полинома Ньютона в любом значении аргумента x при условии произвольного количества узловых значений исходной функции.

По заданным узловым значениям исходной функции (векторы X и Y) записать систему линейных алгебраических уравнений для расчета коэффициентов кубического сплайна со свободным закреплением концов, решить эту систему в MathCAD вычислительным блоком Given…find, записать функцию $f(x)$, реализующую рассчитанный кубический сплайн, считая, что за границами рассматриваемого диапазона изменения аргумента изменение функции $f(x)$ осуществляется соответственно по начальному и конечному частям сплайна. Построить в одном графическом шаблоне рассчитанный кубический сплайн и узловые значения исходной функции.

По заданным узловым значениям исходной функции (векторы X и Y) методом наименьших квадратов построить коэффициенты аппроксимирующего обобщенного многочлена $Pm(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ - система базисных функций (в задании даны степенные функции). Согласно метода наименьших квадратов коэффициенты a_k определяются из условия

$$\sigma^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - Pm(X_i)\right)^2 \to \min \tag{1}$$

При поиске минимального значения σ^2 необходимое и достаточное условие

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_k} = 0 \qquad k = \overline{1,m} \tag{2}$$

дает систему из m линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_k. Записать систему (2) и решить ее в MathCAD вычислительным блоком Given…find, отобразить в одном графическом шаблоне полученный аппроксимирующий обобщенный многочлен $Pm(x)$ и узловые значения исходной функции. Рассчитать величину σ^2 для полученного аппроксимирующего обобщенного многочлена.

$$X = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}6 \\ 3{,}7 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}, \quad P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

$$g(x) = x^3 + 10x^2, \quad [0{,}5;1{,}5], \quad N = 8, \; r = 2;\, 4;\, 6, \; \text{lnfit}$$

Решение.

Строим ***интерполяционный полином Ньютона (вид записи – интерполяция назад)***:

$$N_n(x) = y_n + \sum_{k=1}^{n} (x - x_n)\cdot(x - x_{n-1})\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-k+1})\cdot\Delta_k^{n-k}.$$

Разделенными разностями первого порядка, составленными по соседним узлам, называют отношения

$$\Delta_1^i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = \overline{0, n-1}.$$

По ним можно определить разделенные разности второго порядка

$$\Delta_2^i = \frac{\Delta_1^{i+1} - \Delta_1^i}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = \overline{0, n-2}.$$

Аналогично определяются разделенные разности более высокого порядка. Например, если известны разделенные разности $(k-1)$-го порядка, то разделенная разность k -го порядка определяется как

$$\Delta_k^i = \frac{\Delta_{k-1}^{i+1} - \Delta_{k-1}^i}{x_{i+k} - x_i}, \qquad i = \overline{0, n-k}\,.$$

Вычисления производим в MathCAD:

$$X := \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.6 \\ 3.7 \\ 2.1 \end{pmatrix} \qquad n := 3$$

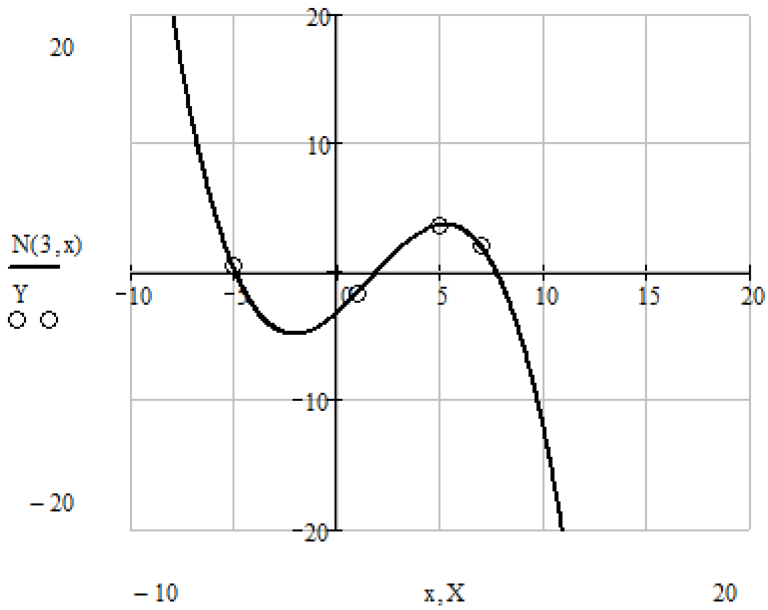
```
Δ := | for i ∈ 0..n
     |   d[i,0] ← Y[i]
     | for k ∈ 1..n
     |   for i ∈ 0..n − k
     |     d[i,k] ← (d[i+1,k−1] − d[i,k−1]) / (X[i+k] − X[i])
     | d
```

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.35 & 0.1675 & -0.04347 \\ -1.6 & 1.325 & -0.35417 & 0 \\ 3.7 & -0.8 & 0 & 0 \\ 2.1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

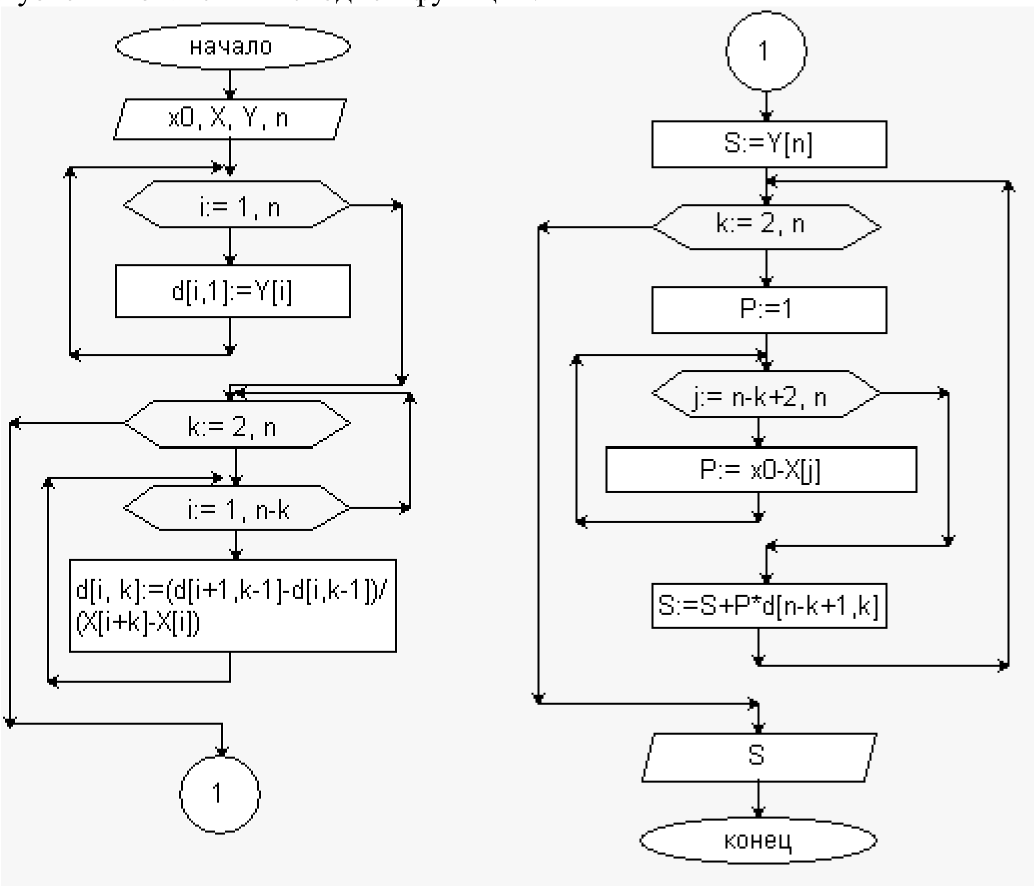
$$N(n,x) := Y_n + \sum_{k=1}^{n} \left[\prod_{j=n-k+1}^{n} (x - X_j) \cdot \Delta_{n-k,k} \right]$$

$$N(3,x) \;\Big|\; \begin{matrix}\text{simplify} \\ \text{float}, 4\end{matrix} \rightarrow (-3.174) + 1.407 \cdot x + .2110 \cdot x^2 - .4347e\text{-}1 \cdot x^3$$

Построим в MathCAD в одном графическом шаблоне полученный интерполяционный полином и узловые значения исходной функции.



Блок-схема алгоритма, реализующего вычисление значения интерполяционного полинома Ньютона (назад) в любом значении аргумента x_T при условии произвольного количества узловых значений исходной функции:



По заданным узловым значениям исходной функции (векторы X и Y) запишем ***СЛАУ для расчета коэффициентов кубического сплайна*** со свободным закреплением концов.

Известно, что при кубическом сплайне между парой соседних узлов интерполяции имеем кубический многочлен вида

$$S_k^3(x) = a_k + b_k \cdot (x - x_{k-1}) + c_k \cdot (x - x_{k-1})^2 + d_k \cdot (x - x_{k-1})^3, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, n}.$$

Для определения коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k на всех n отрезках записывают и решают $4n$ линейных уравнений из условия непрерывности функции

$$S_k^3(x_{k-1}) = a_k = y_{k-1}, \qquad k = \overline{1,n}$$

$$S_k^3(x_k) = a_k + b_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + c_k \cdot (x_k - x_{k-1})^2 + d_k \cdot (x_k - x_{k-1})^3 = y_k,$$

непрерывности первых и вторых производных в узлах интерполяции

$$\left(S_k^3(x)\right)' = b_k + 2c_k \cdot (x - x_{k-1}) + 3d_k \cdot (x - x_{k-1})^2,$$

$$\left(S_k^3(x)\right)'' = 2c_k + 6d_k \cdot (x - x_{k-1}),$$

$$\left(S_k^3(x_k)\right)' = \left(S_{k+1}^3(x_k)\right)',$$

$$\left(S_k^3(x_k)\right)'' = \left(S_{k+1}^3(x_k)\right)'', \quad k = \overline{1, n-1}$$

и условия свободного закрепления концов

$$\left(S_1^3(x_0)\right)'' = 0,$$

$$\left(S_n^3(x_n)\right)'' = 0.$$

В нашем случае имеем:

$$X = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.6 \\ 3.7 \\ 2.1 \end{pmatrix} \qquad n = 3$$

$b1 := 1 \quad b2 := 0 \quad b3 := 0$

$c1 := 0 \quad c2 := 0 \quad c3 := 0$

$d1 := 1 \quad d2 := 1 \quad d3 := 1$

$a1 := 0 \quad a2 := 0 \quad a3 := 0$

Given

$a1 = Y_0 \qquad a2 = Y_1 \qquad a3 = Y_2$

$$b1 + 2\cdot c1\cdot(X_1 - X_0) + 3\cdot d1\cdot(X_1 - X_0)^2 = b2$$

$$b2 + 2\cdot c2\cdot(X_2 - X_1) + 3\cdot d2\cdot(X_2 - X_1)^2 = b3$$

$$2\cdot c1 + 6\cdot d1\cdot(X_1 - X_0) = 2\cdot c2$$

$$2\cdot c2 + 6\cdot d2\cdot(X_2 - X_1) = 2\cdot c3$$

$$c1 = 0$$

$$a1 + b1\cdot(X_1 - X_0) + c1\cdot(X_1 - X_0)^2 + d1\cdot(X_1 - X_0)^3 = Y_1$$

$$a2 + b2\cdot(X_2 - X_1) + c2\cdot(X_2 - X_1)^2 + d2\cdot(X_2 - X_1)^3 = Y_2$$

$$a3 + b3\cdot(X_3 - X_2) + c3\cdot(X_3 - X_2)^2 + d3\cdot(X_3 - X_2)^3 = Y_3$$

$$2\cdot c3 + 6\cdot d3\cdot(X_3 - X_2) = 0$$

Решаем эту систему в MathCAD вычислительным блоком Given…find:

$$v := \mathrm{Find}(a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3, d1, d2, d3)$$

Получаем:

v =

	0
0	0.5
1	-1.6
2	3.7
3	-1.116
4	1.182
5	0.079
6	0
7	0.383
8	-0.659
9	0.021
10	-0.087
11	0.11

$$S1(x) := v_0 + v_3\cdot(x - X_0) + v_6\cdot(x - X_0)^2 + v_9\cdot(x - X_0)^3 \;\Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{float},4\end{matrix} \rightarrow (-2.420) + .4799\cdot x + .2128e\text{-}1\cdot x^3 + .3192\cdot x^2$$

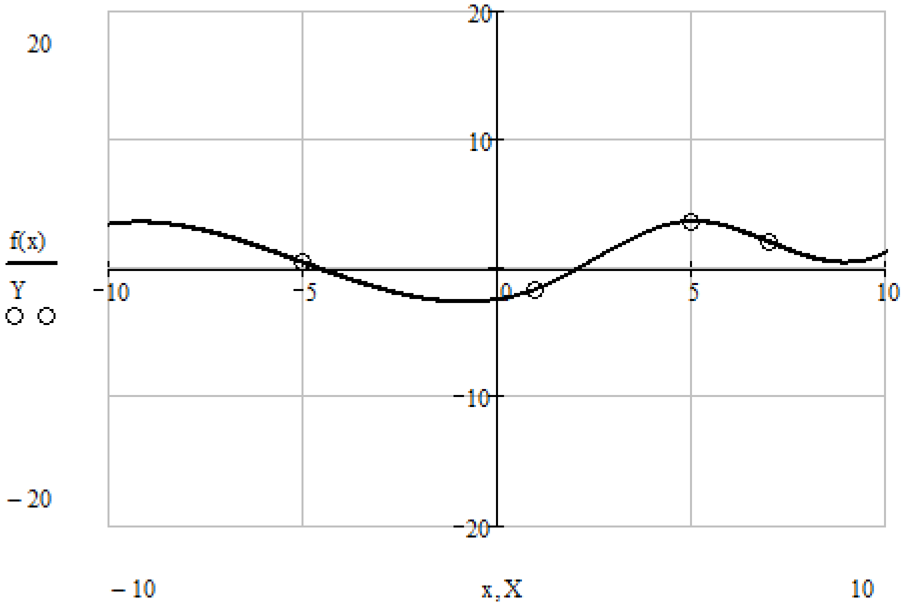
$$S2(x) := v_1 + v_4\cdot(x - X_1) + v_7\cdot(x - X_1)^2 + v_{10}\cdot(x - X_1)^3 \;\Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{float},4\end{matrix} \rightarrow (-2.312) + .1556\cdot x + .6435\cdot x^2 - .8683e\text{-}1\cdot x^3$$

$$S3(x) := v_2 + v_5\cdot(x - X_2) + v_8\cdot(x - X_2)^2 + v_{11}\cdot(x - X_2)^3 \;\Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{float},4\end{matrix} \rightarrow (-26.89) + 14.90\cdot x - 2.306\cdot x^2 + .1098\cdot x^3$$

Запишем функцию $f(x)$, реализующую рассчитанный кубический сплайн, считая, что за границами рассматриваемого диапазона изменения аргумента изменение функции $f(x)$ осуществляется соответственно по начальному и конечному частям сплайна:

$$f(x) := \left|\begin{array}{l} y \leftarrow S1(x) \;\; \text{if} \;\; x \le X_1 \\ y \leftarrow S2(x) \;\; \text{if} \;\; X_1 \le x \le X_2 \\ y \leftarrow S3(x) \;\; \text{if} \;\; X_2 \le x \\ y \end{array}\right.$$

Построим в одном графическом шаблоне рассчитанный кубический сплайн и узловые значения исходной функции:



По заданным узловым значениям исходной функции (векторы X и Y) методом наименьших квадратов определим ***коэффициенты аппроксимирующего обобщенного многочлена*** $Pm(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ - система базисных функций (в задании даны степенные функции). Согласно метода наименьших квадратов коэффициенты a_k определяются из условия

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - Pm(X_i)\right)^2 \to \min. \qquad (1)$$

При поиске минимального значения σ^2 необходимое и достаточное условие

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_k} = 0 \qquad k = \overline{1,m} \qquad (2)$$

дает систему из m линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_k. Запишем систему (2) и решим ее в MathCAD вычислительным блоком Given…find.

Экстремальная задача примет вид:

$$\sigma^2(a_0,a_1,a_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2\right) - Y_i\right)^2 \to \min .$$

Параметры искомой зависимости находятся из системы:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\left(a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2\right) - Y_i\right) \cdot 1\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\left(a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2\right) - Y_i\right) \cdot X_i\right) = 0, \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\left(a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2\right) - Y_i\right) \cdot X_i^2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2\right) - Y_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2\right) - Y_i X_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2\right) - Y_i X_i^2\right) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^3 = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^4 = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i^2. \end{cases}$$

$A0 := 0 \qquad A1 := 0 \qquad A2 := 0$

Given

$$A0\cdot(n+1) + A1\cdot\sum_{i=0}^{n} X_i + A2\cdot\sum_{i=0}^{n} \left(X_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} Y_i$$

$$A0\cdot\sum_{i=0}^{n} X_i + A1\cdot\sum_{i=0}^{n} \left(X_i\right)^2 + A2\cdot\sum_{i=0}^{n} \left(X_i\right)^3 = \sum_{i=0}^{n} \left(Y_i\cdot X_i\right)$$

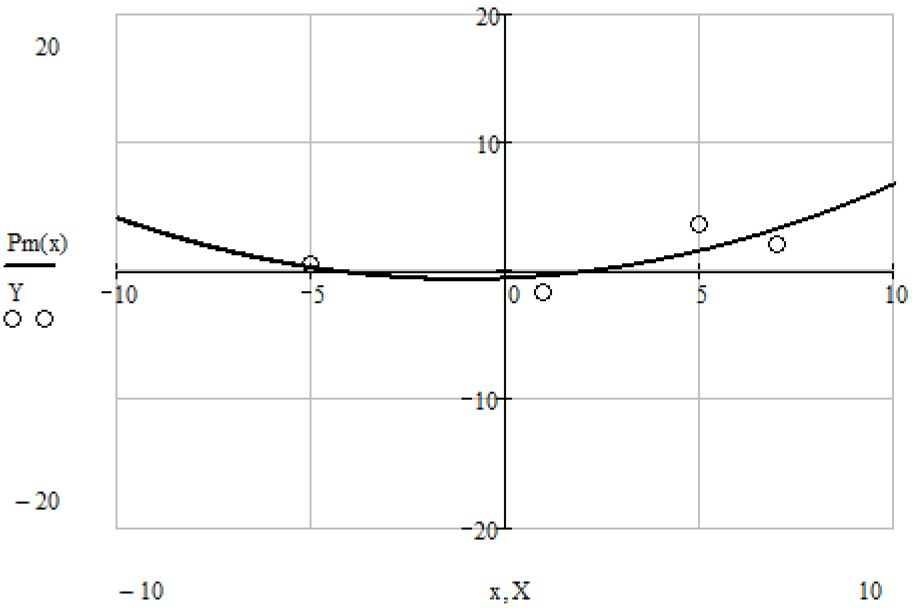
$$A0\cdot\sum_{i=0}^{n} \left(X_i\right)^2 + A1\cdot\sum_{i=0}^{n} \left(X_i\right)^3 + A2\cdot\sum_{i=0}^{n} \left(X_i\right)^4 = \sum_{i=0}^{n} \left[Y_i\cdot\left(X_i\right)^2\right]$$

$A := \mathrm{Find}(A0, A1, A2)$

$$A = \begin{pmatrix} -0.60549 \\ 0.1303 \\ 0.0608 \end{pmatrix} \qquad Pm(x) := A_0 + A_1\cdot x + A_2\cdot x^2$$

$$Pm(x)\ \mathrm{float}, 5 \ \rightarrow (-.60549) + .13030\cdot x + .60795e\text{-}1\cdot x^2$$

Отобразим в одном графическом шаблоне полученный аппроксимирующий обобщенный многочлен $Pm(x)$ и узловые значения исходной функции:



Величина σ^2 для полученного аппроксимирующего обобщенного многочлена:

$$\sigma2 := \sum_{i=0}^{n} \left(Y_i - Pm\left(X_i\right)\right)^2 \qquad \sigma2 = 7.42189$$

а) Реализуем в MathCAD по рассчитанным узловым значениям (векторы $X1$ и $Y1$) кусочно-линейную интерполяцию (функция *linterp*), кубическую сплайновую с различным продолжением (функции *lspline, pspline, cspline, interp*). Отобразим в одном графическом шаблоне исходную функцию $g(x)$, узловые значения (векторы $X1$ и $Y1$) и четыре полученные интерполяционные функции.

$g(x) := x^3 + 10 \cdot x^2 \qquad a := 0.5 \quad b := 1.5 \qquad N := 8 \quad h := \dfrac{b-a}{N-1}$

$i := 0..N-1 \qquad X1_i := a + i \cdot h \qquad Y1_i := g(X1_i)$

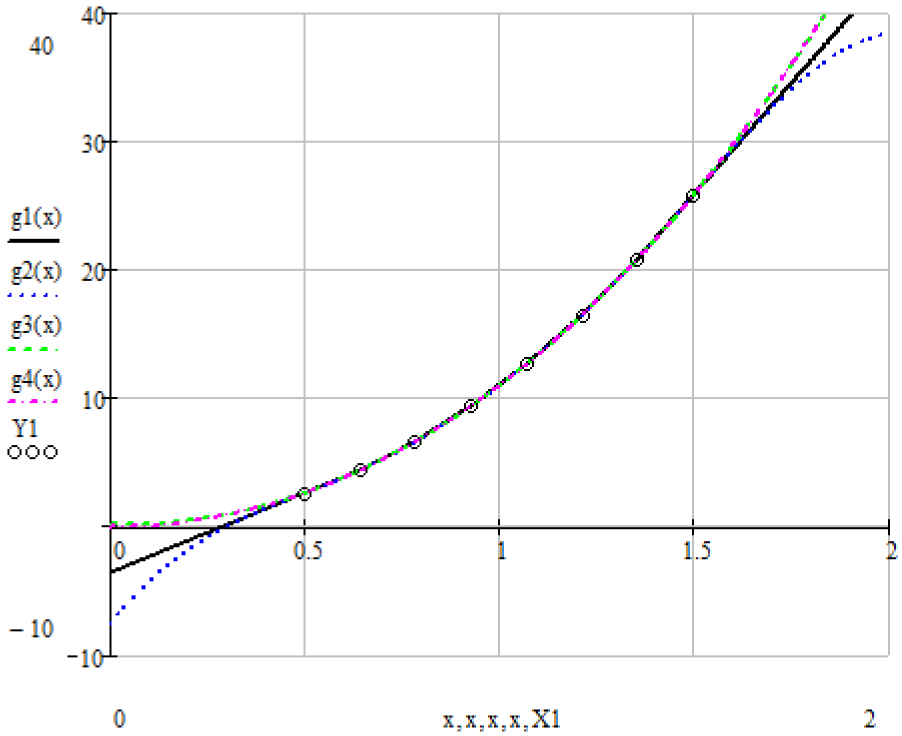
$$X1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.643 \\ 0.786 \\ 0.929 \\ 1.071 \\ 1.214 \\ 1.357 \\ 1.5 \end{pmatrix} \qquad Y1 = \begin{pmatrix} 2.625 \\ 4.398 \\ 6.659 \\ 9.423 \\ 12.71 \\ 16.535 \\ 20.918 \\ 25.875 \end{pmatrix}$$

$g1(x) := \text{linterp}(X1, Y1, x)$

$g2(x) := \text{interp}(\text{lspline}(X1, Y1), X1, Y1, x)$

$g3(x) := \text{interp}(\text{pspline}(X1, Y1), X1, Y1, x)$

$g4(x) := \text{interp}(\text{cspline}(X1, Y1), X1, Y1, x)$



б) По узловым значениям (векторы $X1$ и $Y1$) реализовать в MathCAD B-сплайн интерполяцию с различными степенями заменяющих полиномов ($n = 1;\ 2;\ 3$), выбрав самостоятельно векторы точек сшивок U. В одном графическом шаблоне отобразить исходную функцию $g(x)$, узловые значения (векторы $X1$ и $Y1$), три интерполяционные функции *B*-сплайнов и соответствующие им точки сшивок.

линейная интерполяция

$U1 := X1$

$B1 := \mathrm{bspline}(X1, Y1, U1, 1) \qquad C := B1_1 \quad D := B1_2$

$$f1(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N-2 \\ \quad fx \leftarrow C_{0,i} + C_{1,i} \cdot x \text{ if } D_{0,i} \le x < D_{1,i} \\ fx \leftarrow C_{0,0} + C_{1,0} \cdot x \text{ if } D_{0,0} > x \\ fx \leftarrow C_{0,N-2} + C_{1,N-2} \cdot x \text{ if } D_{1,N-2} \le x \\ fx \end{array} \right.$$

квадратичная интерполяция

$j := 0..N-2 \qquad U2_j := a + \frac{b-a}{N-2} \cdot j$

$B2 := \mathrm{bspline}(X1, Y1, U2, 2) \qquad C := B2_1 \quad D := B2_2$

$$f2(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N-3 \\ \quad fx \leftarrow C_{0,i} + C_{1,i} \cdot x + C_{2,i} \cdot x^2 \text{ if } D_{0,i} \le x < D_{1,i} \\ fx \leftarrow C_{0,0} + C_{1,0} \cdot x + C_{2,0} \cdot x^2 \text{ if } D_{0,0} > x \\ fx \leftarrow C_{0,N-3} + C_{1,N-3} \cdot x + C_{2,N-3} \cdot x^2 \text{ if } D_{1,N-2} \le x \\ fx \end{array} \right.$$

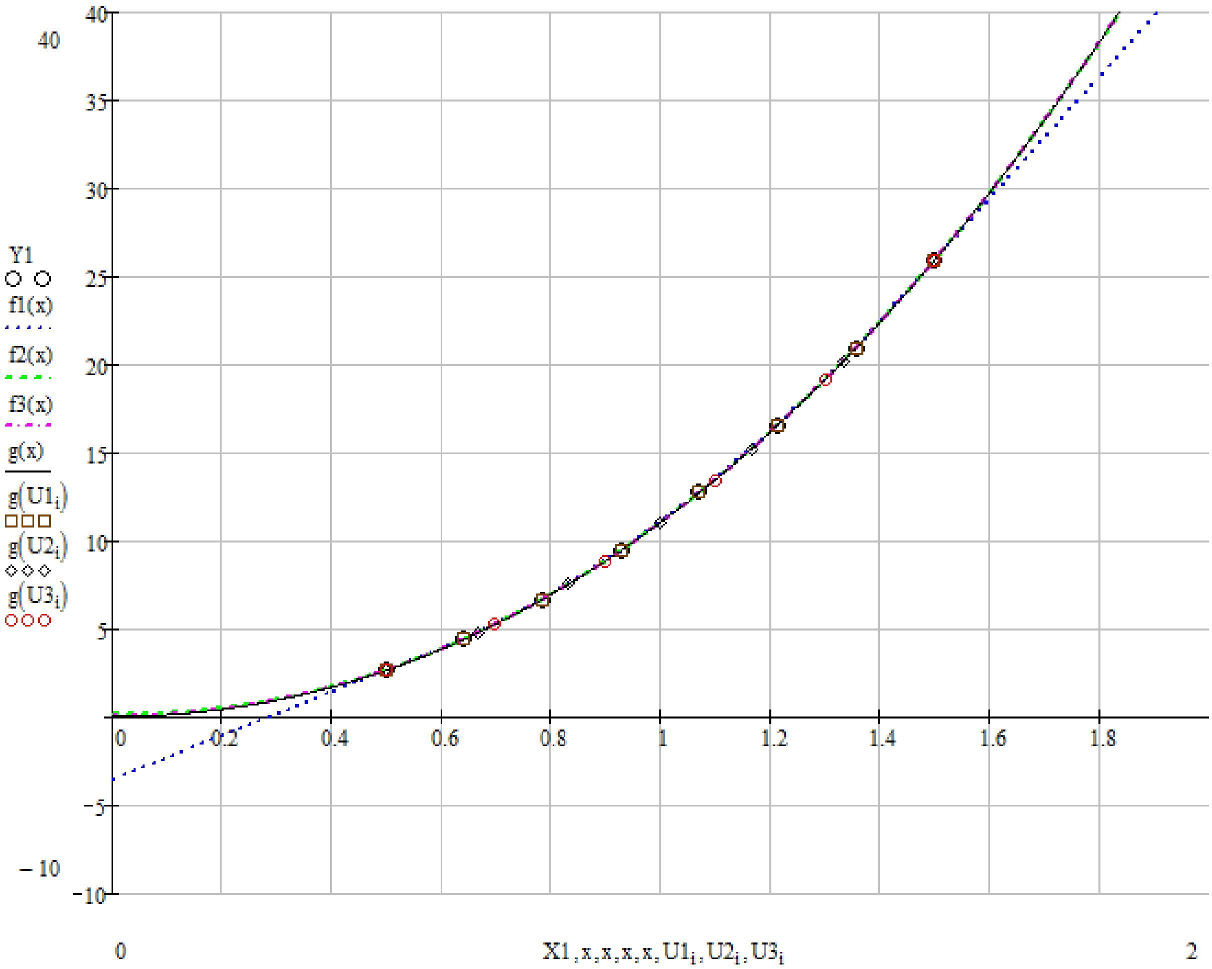
кубическая интерполяция

$j := 0..N-3 \qquad U3_j := a + \frac{b-a}{N-3} \cdot j$

$B3 := \mathrm{bspline}(X1, Y1, U3, 3) \qquad C := B3_1 \quad D := B3_2$

$$f3(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N-4 \\ \quad fx \leftarrow C_{0,i} + C_{1,i} \cdot x + C_{2,i} \cdot x^2 + C_{3,i} \cdot x^3 \text{ if } D_{0,i} \le x < D_{1,i} \\ fx \leftarrow C_{0,0} + C_{1,0} \cdot x + C_{2,0} \cdot x^2 + C_{3,0} \cdot x^3 \text{ if } D_{0,0} > x \\ fx \leftarrow C_{0,N-4} + C_{1,N-4} \cdot x + C_{2,N-4} \cdot x^2 + C_{3,N-4} \cdot x^3 \text{ if } D_{1,N-4} \le x \\ fx \end{array} \right.$$

Графики:



в) По узловым значениям (векторы $X1$ и $Y1$) реализуем в MathCAD линейную аппроксимацию (функции *line, medfit*), полиномиальную аппроксимацию (функции *regress* (в задании даны степени аппроксимирующих полиномов) и *loess* (параметр *span* выбрать самостоятельно)), аппроксимацию функциями специального вида (в задании указана одна из функций *expfit, lgsfit, sinfit, pwfit, logfit,* ***lnfit***).

Для всех аппроксимирующих функций рассчитаем величину среднеквадратичного отклонения (σ^2).

линейная регрессия

$y1(x) := line(X1,Y1)_0 + x \cdot line(X1,Y1)_1$

$$\sigma2\_1 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left(Y1_i - y1\left(X1_i\right)\right)^2 \qquad \sigma2\_1 = 1.47877$$

$y2(x) := medfit(X1,Y1)_0 + x \cdot medfit(X1,Y1)_1$

$$\sigma2\_2 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left(Y1_i - y2\left(X1_i\right)\right)^2 \qquad \sigma2\_2 = 1.54955$$

полиномиальная регрессия

$y3(x) := interp(regress(X1,Y1,2),X1,Y1,x)$

$$\sigma2\_3 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left(Y1_i - y3\left(X1_i\right)\right)^2 \qquad \sigma2\_3 = 0.00063$$

$y4(x) := interp(regress(X1,Y1,4),X1,Y1,x)$

$$\sigma2\_4 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left(Y1_i - y4\left(X1_i\right)\right)^2 \qquad \sigma2\_4 = 0$$

$y5(x) := interp(regress(X1,Y1,6),X1,Y1,x)$

$$\sigma2\_5 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left(Y1_i - y5\left(X1_i\right)\right)^2 \qquad \sigma2\_5 = 0$$

регрессия отрезками полиномов

$y6(x) := interp(loess(X1,Y1,0.93),X1,Y1,x)$

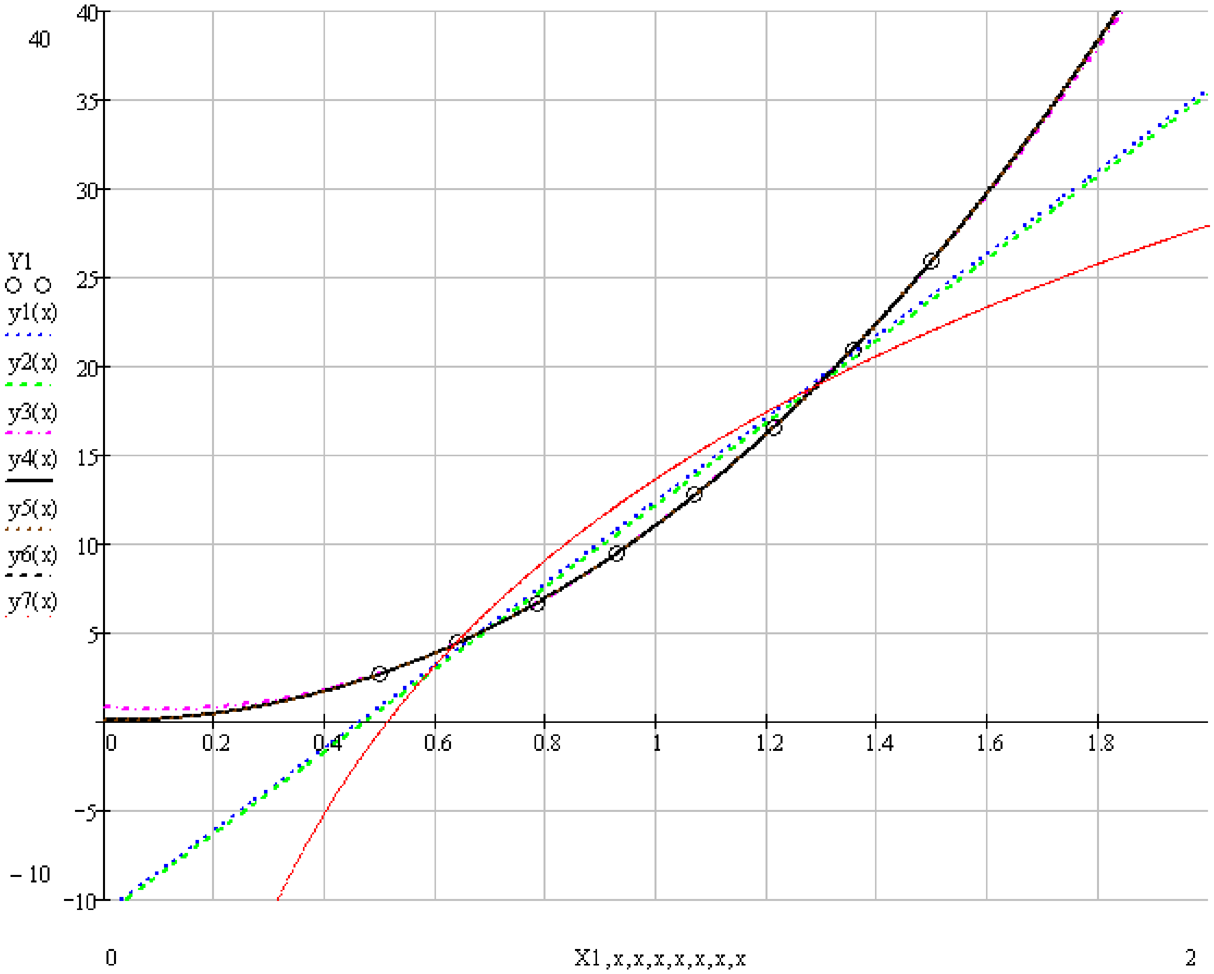
$$\sigma2\_6 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left(Y1_i - y6\left(X1_i\right)\right)^2 \qquad \sigma2\_6 = 0$$

аппроксимация функциями специального вида - логарифмической функцией
f (x)=aln(x)+b

$y7(x) := lnfit(X1,Y1)_0 \cdot \ln(x) + lnfit(X1,Y1)_1$

$$\sigma2\_7 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left(Y1_i - y7\left(X1_i\right)\right)^2 \qquad \sigma2\_7 = 5.59468$$

Отобразим в одном графическом шаблоне исходную функцию $g(x)$, узловые значения (векторы $X1$ и $Y1$) и полученные аппроксимирующие функции.



Задание 4.15. В MathCAD вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ ***методом Симпсона*** при заданном количестве N разбиений интервала интегрирования $[a,b]$ (шаг интегрирования $h = \frac{b-a}{N}$) и оценить погрешность применения данной составной квадратурной формулы для вычисления интеграла.

Для вычисления интеграла по указанному методу написать функцию пользователя, в которой входным параметром является количество N разбиений интервала интегрирования. Отобразить функции $f(x)$, $f''(x)$ и $f^{IV}(x)$ (в соответствии с применяемыми методами) на интервале $[a,b]$. По оценке погрешности составной квадратурной формулы интегрирования указанным методом рассчитать количество требуемых интервалов разбиения для вычисления интеграла с заданной точностью ε. Вычислить интеграл с этой точностью.

$$f(x) = e^{-x}\left(x^2 + 2x\right), \quad [-2;3], \quad N = 6;\,10, \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

Решение.

Разбиение интервала задается следующим образом:

$$a = -2,\ b = 3,\ h = \frac{b-a}{N}, \qquad x_i = a + ih,\ i = \overline{0,N}.$$

Для вычисления интеграла **методом Симпсона** воспользуемся формулой:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot\{f(a) + 2[f(a+2h) + \ldots + f(a+(n-2)h)] + 4[f(a+h) + \ldots + f(a+(n-1)h)] + f(b)\}.$$

Составим в MathCAD функцию пользователя и вычислим интеграл при разных количествах разбиений:

$f(x) := e^{-x}\cdot\left(x^2 + 2\cdot x\right)$ $\qquad a := -2 \quad b := 3$

вычисление интеграла

$$\mathrm{Int}(N) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{N} \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad x_i \leftarrow a + i\cdot h \\ S \leftarrow \dfrac{h}{3}\cdot\left(f(a) + 2\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f\left(x_{2\cdot i}\right) + 4\cdot\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} f\left(x_{2\cdot i+1}\right) + f(b) \right) \\ S \end{array} \right.$$

$\mathrm{Int}(6) = -1.04988$

$\mathrm{Int}(10) = -1.21602$

В методе Симпсона (по удвоенным частичным отрезкам) – оценка погрешности соответственно

$$|\varphi_N| \le \frac{M_4\cdot(b-a)^5}{180N^4},$$

где $M_4 = \max_{a\le x\le b}|f^{IV}(x)|$.

Вычисляем максимальное значение модуля четвертой производной на данном отрезке:

$$g(x) := \left| \frac{d^4}{dx^4} f(x) \right|$$

$x := 0$

Given

$x \geq a$

$x \leq b$

xmax := Maximize(g, x)

xmax = −2

M4 := g(xmax)   M4 = 147.781

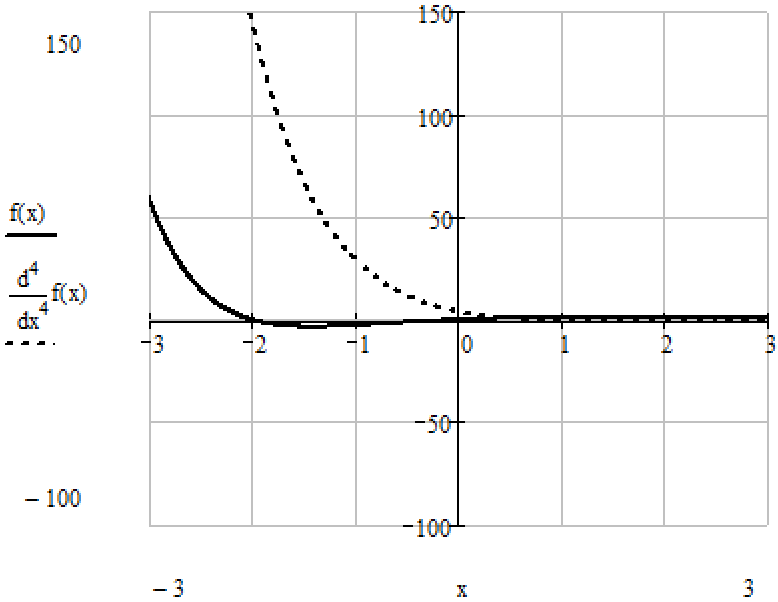
Оценки погрешности для каждого N:

$$\phi(N) := \frac{M4 \cdot (b - a)^5}{180 \cdot N^4}$$

$\phi(6) = 1.97966$

$\phi(10) = 0.25656$

Строим графики функций $f(x)$ и $f^{IV}(x)$:



Находим необходимое количество интервалов для достижения заданной точности:

$$eps := 10^{-3}$$

$$N := 1 + \mathrm{round}\left[\sqrt[4]{\frac{M4\cdot(b-a)^5}{180\cdot eps}}\right] \qquad N = 42$$

$$\mathrm{Int}(42) = -1.24458$$

Список использованных источников

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином, 2006.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Лань, 2009.
3. Черняк А.А., Черняк Ж.А., Доманова Ю.А. Высшая математика на базе MathCad. Общий курс. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
4. Крылов В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный – М.: Наука, 1976, т. 1
5. Крылов В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный – М.: Наука, 1977, т. 2