Справочные материалы

АЛГЕБРА

Числовые множества

$N=\{1,2,3,...\}$ – множество ***натуральных*** чисел.

$N_0=\{0,1,2,3,...\}$.

$Z=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ – множество ***целых*** чисел.

$Q=\left\{\frac{m}{n} \mid m\in Z, n\in N\right\}$ – множество ***рациональных*** чисел (состоит из конечных десятичных дробей и бесконечных периодических десятичных дробей).

Иррациональные числа – множество бесконечных непериодических десятичных дробей.

R – множество ***действительных*** чисел есть объединение множеста рациональных и иррациональных чисел.

Модуль действительного числа

Определение	***Основные свойства модуля***	
$\lvert a\rvert=\begin{cases}a, \text{ если } a\ge 0;\\ -a, \text{ если } a\le 0.\end{cases}$	1. $\lvert a\rvert\ge 0$; 2. $\lvert a\rvert=\lvert -a\rvert$; 3. $\lvert a\rvert\ge a$; 4. $\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$;	5. $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$, $b\ne 0$; 6. $\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$; 7. $\lvert a\rvert^2=a^2=\lvert a^2\rvert$.

Некоторые типы уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

При $a\ge 0$ $\lvert f(x)\rvert=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=a,\\ f(x)=-a.\end{array}\right.$	$\lvert f(x)\rvert<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)<a,\\ f(x)>-a.\end{cases}$
При $a<0$ $\lvert f(x)\rvert=a$ корней не имеет.	$\lvert f(x)\rvert>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)>a,\\ f(x)<-a.\end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}g(x)\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.\end{cases}$ – 1-й способ. $\lvert f(x)\rvert=g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ f(x)=g(x),\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ -f(x)=g(x).\end{cases}\end{array}\right.$ – 2-й способ.	$\lvert f(x)\rvert>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)>g(x),\\ f(x)<-g(x).\end{array}\right.$ $\lvert f(x)\rvert<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>-g(x).\end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert=\lvert g(x)\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.$	$\lvert f(x)\rvert>\lvert g(x)\rvert \Leftrightarrow (f(x))^2>(g(x))^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))>0.$

Степени и корни

1. $a^1 = a$, $a \in \mathbf{R}$; 2. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз}$, $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$; 2. $a^0 = 1$, $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$;	4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in \mathbf{N}$, $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$; 5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 1$, если $m \leq 0$, то $a > 0$, $a \in \mathbf{R}$; если $m > 0$, то $a \geq 0$, $a \in \mathbf{R}$.

Свойства степеней (при допустимых значениях переменных)

1. $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$; 2. $a^p : a^r = a^{p-r}$; 3. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r$;	4. $a^r \cdot b^r = (ab)^r$; 5. $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$; 6. $(a^p)^r = a^{pr}$.

Арифметический квадратный корень: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0$ и $b^2 = a$ $(a \geq 0)$

Тождества	*Основные свойства*	
$(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geq 0$, $a \in \mathbf{R}$; $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$, $a \in \mathbf{R}$.	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; $(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p}$;	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{\lvert a \rvert} \cdot \sqrt{\lvert b \rvert}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\lvert a \rvert}}{\sqrt{\lvert b \rvert}}$; $\sqrt{a^p} = \left(\sqrt{\lvert a \rvert}\right)^p$.

Вынесение множителя из-под знака корня:	*Внесение множителя под знак корня:*
$\sqrt{a^2 b} = \lvert a \rvert \cdot \sqrt{b}$	$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, \text{если } a \geq 0, \\ -\sqrt{a^2 b}, \text{если } a \leq 0. \end{cases}$

Корни n-ой степени: $\sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 1$

Корни четной степени	*Корни нечетной степени*
$\left.\begin{matrix} \sqrt[2n]{a} = b \\ n \in \mathbf{N}, a \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow b \geq 0$, $b^{2n} = a$. ***Корень четной степени из отрицательного числа не определен.*** $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = a$, при $a \geq 0$. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert$, $a \in \mathbf{R}$.	$\left.\begin{matrix} \sqrt[2n+1]{a} = b \\ n \in \mathbf{N}, a \in \mathbf{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow b^{2n+1} = a$. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, при $a \in \mathbf{R}$. $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = a$, при $a \in \mathbf{R}$. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$, при $a \in \mathbf{R}$.

Некоторые типы иррациональных уравнений и неравенств

При $a \ge 0$ $\sqrt{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^2$. При $a < 0$ $\sqrt{f(x)} = a$ корней не имеет.	$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = (g(x))^2. \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases} \end{array} \right.$
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \text{ (или } f(x) \ge 0), \\ f(x) = g(x). \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow 0 \le f(x) < g(x)$.

Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$.

Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \ne 0$:

1) *вычислим дискриминант* $D = b^2 - 4ac$;

2) *если* $D > 0$, *то* $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$;

если $D = 0$, *то* $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$;

если $D < 0$, *то корней нет.*

Теоремы о квадратных уравнениях

Если коэффициент при x в квадратном уравнении четный, *то есть уравнение* *имеет вид* $ax^2 + 2px + c = 0$, ***то можно находить корни по формуле*** $x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D/4}}{a}$, ***при*** $D/4 = p^2 - ac \ge 0$.

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \ne 0$ ***имеет корни*** x_1 ***и*** x_2, ***то***

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Теорема Виета: Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Обратная теорема Виета: Если числа t_1 и t_2 таковы, что $t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a}$ и $t_1 \cdot t_2 = \dfrac{c}{a}$, то они являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Прогрессии

	Арифметическая прогрессия $a_{n+1}=a_n+d$, d - разность прогрессии	*Геометрическая прогрессия* $b_{n+1}=b_n\cdot q$, q – знаменатель прогрессии	*Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия*
Допустимые значения	a_1 и d любые	$b_1\neq 0$, $q\neq 0$	$b_1\neq 0$, $0<\lvert q\rvert<1$
Формула n-го члена	$a_n=a_1+(n-1)d$	$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$	
Свойства	$a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$; $a_n=\dfrac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$	$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$; $b_n^2=b_{n-k}\cdot b_{n+k}$	
Формула суммы n первых членов	$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$; $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$	Если $q\neq 1$, то $S_n=\dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$. Если $q=1$, то $S_n=n\cdot b_1$.	Сумма всех членов $S=\dfrac{b_1}{1-q}$.

Важные неравенства

$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$; ($a\geq 0$, $b\geq 0$)   *Среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического; равенство выполняется только при* $a=b$.
$Ax+\dfrac{B}{x}\geq 2\sqrt{AB}$ при $A\geq 0$, $B\geq 0$, $x>0$
$\left\lvert a+\dfrac{1}{a}\right\rvert\geq 2$; ($a\neq 0$) $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ *при* $a>0$; *равенство выполняется при* $a=1$. $a+\dfrac{1}{a}\leq -2$ *при* $a<0$; *равенство выполняется при* $a=-1$.
$a^2+b^2\geq 2ab$; (a и b любые). *Равенство выполняется при* $a=b$.

Логарифмы

Определение: $\log_a b$ ($a>0$, $a\neq 1$, $b>0$) – показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить число b .

$$a^{\log_a b}=b \text{ – \textbf{\textit{основное логарифмическое тождество.}}}$$

Десятичные логарифмы – логарифмы по основанию 10: $\lg b=\log_{10} b$.

Натуральные логарифмы – логарифмы по основанию e : $\ln b=\log_e b$, где $e=2{,}718281828459045...$ – иррациональное число.

Свойства логарифмов

$a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $y>0$, $m\in \mathbf{R}$, $n\in \mathbf{R}$, $n\neq 0$, $c>0$, $c\neq 1$

$\log_a 1=0$	$\log_{a^n} x^m=\frac{m}{n}\log_a x$	$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$	$\log_a x=\frac{\log_c x}{\log_c a}$
$\log_a a=1$	$\log_a x^m=m\log_a x$ $\log_{a^n} x=\frac{1}{n}\log_a x$	$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$	$\log_a c=\frac{1}{\log_c a}$
$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$		$a^{\sqrt{\log_a b}}=b^{\sqrt{\log_b a}}$	
$\log_a b>0$, если $a>1$ и $b>1$ или $0<a<1$ и $0<b<1$		$\log_a b<0$, если $a>1$ и $0<b<1$ или $b>1$ и $0<a<1$	

Простейшие логарифмические уравнения и неравенства

$\log_a x=\log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ x>0 (\text{или } y>0) \end{cases}$	Если $\log_a x<\log_a y$ и $a>1$, то $0<x<y$.
	Если $\log_a x<\log_a y$ и $0<a<1$, то $x>y>0$.
$\log_a f(x)<\log_a g(x) \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x))<0$ при всех допустимых значениях переменной и $a>0$, $a\neq 1$	

Простейшие показательные уравнения и неравенства

Если $a^x=a^y$, $a>0$, $a\neq 1$, то $x=y$.	Если $a^x<a^y$ и $a>1$, то $x<y$.
	Если $a^x<a^y$ и $0<a<1$, то $x>y$.
$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x))<0$, если $a>0$, $a\neq 1$	

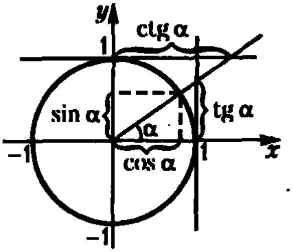
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Соотношения между градусной и радианной мерами углов

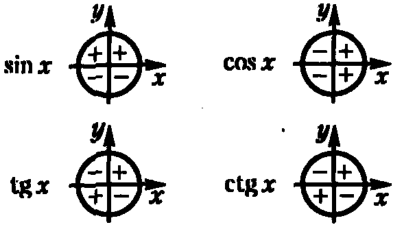
$$2\pi\ \textit{рад} = 360^\circ;\ 1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \textit{рад} \approx 0{,}017\ \textit{рад};\ 1\ \textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$$

$$n^\circ = \frac{\pi \cdot n}{180}\ \textit{рад},\quad n\ \textit{рад} = \frac{180^\circ \cdot n}{\pi}$$

Тригонометрические функции



Знаки тригонометрических функций



Значения тригонометрических функций для некоторых углов

радианы	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
градусы	−180°	−90°	−60°	−45°	−30°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	−1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	–	$-\sqrt{3}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	–

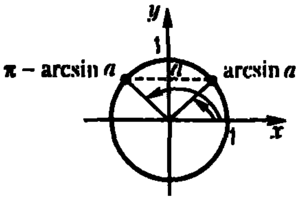
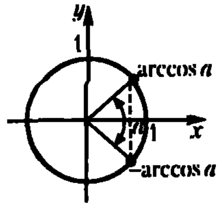
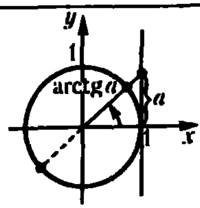
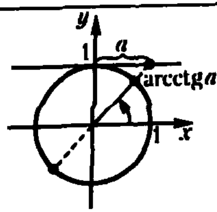
Формулы приведения

	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi n-\alpha$, где $n\in\mathbb{Z}$	$2\pi n+\alpha$, где $n\in\mathbb{Z}$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Частные случаи простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$	Если $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, то $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Если $\lvert a \rvert > 1$, то корней нет.	
$\cos x = a$	Если, $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ то $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Если $\lvert a \rvert > 1$, то корней нет.	
$\mathrm{tg}\, x = a$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.	
$\mathrm{ctg}\, x = a$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.	

Некоторые типы тригонометрических уравнений

$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2\pi n, \\ x = \pi - y + 2\pi n, \end{array}\right.\ n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2\pi n, \\ x = -y + 2\pi n, \end{array}\right.\ n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, y \Leftrightarrow x = y + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\mathrm{ctg}\, x = \mathrm{ctg}\, y \Leftrightarrow x = y + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Основные тригонометрические равенства и схема их взаимосвязей

$$3\alpha = 2\alpha + \alpha$$
$$4\alpha = 2\alpha + 2\alpha$$
$$\ldots$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3\,\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$$

$$-\beta = +(-\beta)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}\right\}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$2\alpha = \alpha + \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\\
\cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}
\end{aligned}\right\}$$

Универсальная тригонометрическая подставка

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\
\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}
\end{aligned}\right\} \longrightarrow \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

ЗНАК ПЕРЕД КОРНЕМ ВЫБИРАЕТСЯ ПО ЗНАКУ ЛЕВОЙ ЧАСТИ

(+) означает "сложить"; (−) – "вычесть"

Основные тригонометрические равенства и схема их взаимосвязей

$+$ $$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$-$ $$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$+$ $$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=x\\ \alpha+\beta=y\end{array}\right\}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{x+y}{2}\\ \beta=\dfrac{y-x}{2}\end{array}\right.$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$\boxed{y\to(-y)}$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\alpha\pm\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{3}\sin\alpha\pm\cos\alpha=2\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

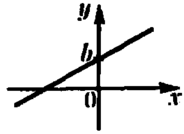
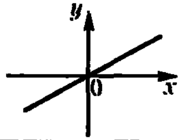
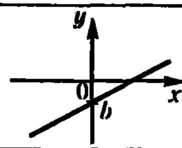
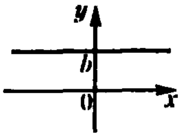
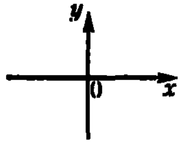
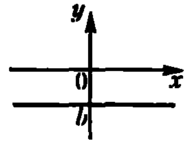
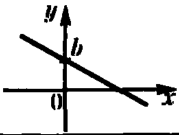
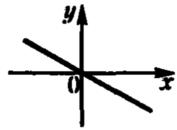
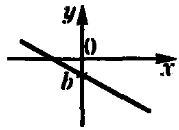
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

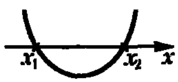
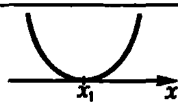
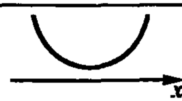
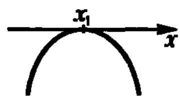
ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

$D(y)$ - область определения функции; $E(y)$ - область значений функции.

Линейная функция: $y = kx + b$ ($D(y) = R$)

	$b>0$	$b=0$	$b<0$
$k>0$			
$k=0$			
$k<0$			

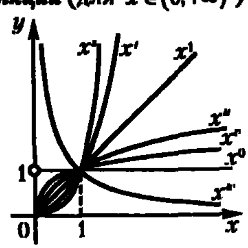
Квадратичная функция: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ($D(y) = \mathbf{R}$) (дискриминант $D = b^2 - 4ac$)

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			

Степенная функция: $y = x^r$

1. $r \in \mathbf{N}$, то $D(y) = \mathbf{R}$.
2. $r \in \mathbf{Z}$, $r \leq 0$, то $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. r – не целое, $r > 0$, то $D(y) = [0; +\infty)$.
4. r – не целое, $r < 0$, то $D(y) = (0; +\infty)$.

Сравнение графиков степенных функций (для $x \in (0; +\infty)$)

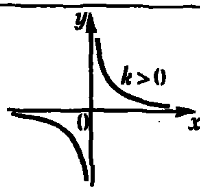


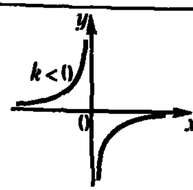
$w < 0 < v < u < 1 < t < s$

Частные случаи степенной функции

Обратная пропорциональность: $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$

($D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$)



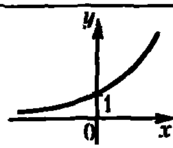


Функция $y=\sqrt{x}$

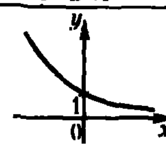
($D(y)=[0;+\infty)$)

Показательная функция: $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ ($D(y)=\mathbf{R}$)

$a>1$

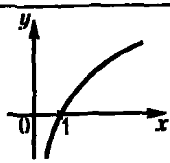


$0<a<1$

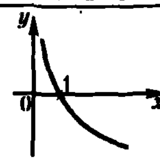


Логарифмическая функция: $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$ ($D(y)=(0;+\infty)$)

$a>1$

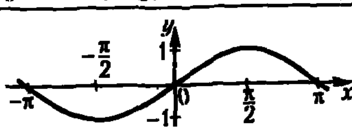


$0<a<1$

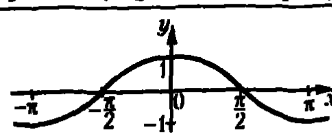


Тригонометрические функции

$y=\sin x$ ($D(y)=\mathbf{R}$, $E(y)=[-1;1]$)

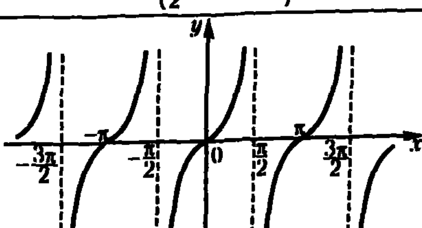


$y=\cos x$ ($D(y)=\mathbf{R}$, $E(y)=[-1;1]$)



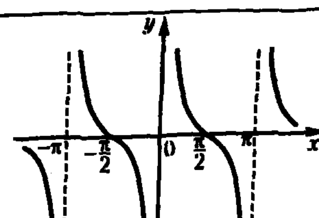
$y=\mathrm{tg}\,x$

($D(y)=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in\mathbf{Z}\right\}$, $E(y)=\mathbf{R}$)

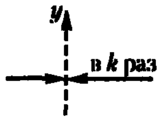
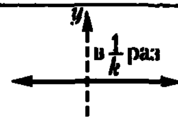
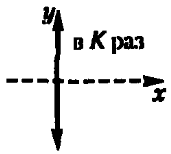
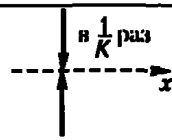
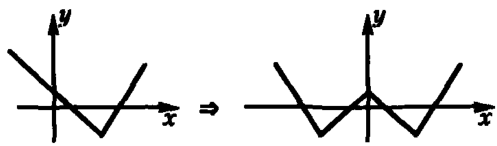
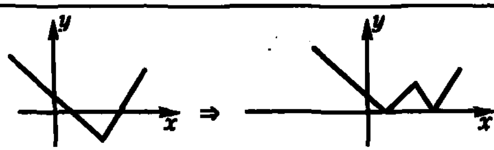


$y=\mathrm{ctg}\,x$

($D(y)=\mathbf{R}\setminus\{\pi n \mid n\in\mathbf{Z}\}$, $E(y)=\mathbf{R}$)



Геометрические преобразования графиков функций

№	$f(x)$	*График функции* $f(x)$	
1	$f(-x)$	*симметрия относительно оси* Oy	
2	$-f(x)$	*симметрия относительно оси* Ox	
3	$f(x+b)$	$\xleftarrow{\text{на } b}$ *Сдвиг влево на* b *, если* $b>0$.	$\xrightarrow{\text{на } \lvert b\rvert}$ *Сдвиг вправо на* $\lvert b\rvert$ *, если* $b<0$.
4	$f(x)+B$	$\uparrow$ на B *Сдвиг вверх на* B *, если* $B>0$.	$\downarrow$ на $\lvert B\rvert$ *Сдвиг вниз на* $\lvert B\rvert$ *, если* $B<0$.
5	$f(kx)$	 *Сжатие в* k *раз вдоль оси* Ox , *если* $k>1$	 *Растяжение в* $\frac{1}{k}$ *раз вдоль оси* Ox , *если* $0<k<1$.
6	$Kf(x)$	 *Растяжение в* K *раз вдоль оси* Oy *, если* $K>1$.	 *Сжатие в* $\frac{1}{K}$ *раз вдоль оси* Oy , *если* $0<K<1$.
7	$f(\lvert x\rvert)$		
8	$\lvert f(x)\rvert$		

Правила построения графика функции $f(kx+b)=f(k(x+\frac{b}{k}))$:

1-й способ. $f(x)$ →(преобраз. 5)→ $f(kx)$ →(преобраз. 3)→ $f(k(x+\frac{b}{k}))=f(kx+b)$.

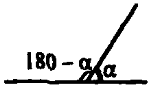
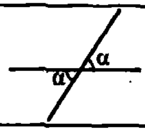
2-й способ. $f(x)$ →(преобраз. 3)→ $f(x+b)$ →(преобраз. 5)→ $f(kx+b)$.

Уравнение окружности

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ уравнение окружности с центром в точке $(x_0;\ y_0)$ и радиусом R.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Углы

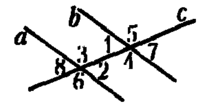
Смежные углы		Сумма смежных углов равна 180°
Вертикальные углы		Вертикальные углы равны

Параллельные прямые

Накрест лежащие углы равны
$(\angle 1=\angle 2;\ \angle 3=\angle 4;\ \angle 5=\angle 6;\ \angle 7=\angle 8)$.
Соответственные углы равны
$(\angle 1=\angle 8;\ \angle 2=\angle 7;\ \angle 3=\angle 5;\ \angle 4=\angle 6)$.
Сумма односторонних углов равна 180°
$(\angle 1+\angle 3=\angle 5+\angle 8=\angle 2+\angle 4=\angle 6+\angle 7=180^\circ)$.

$\Leftrightarrow$

Прямые a и b параллельны, прямая c – секущая



Обобщенная теорема Фалеса

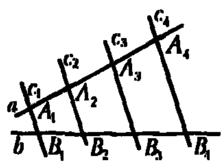
Если на одной из двух прямых отложены несколько отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то

$\Rightarrow$

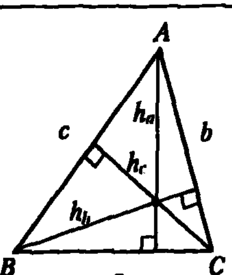
на второй прямой высекутся отрезки, пропорциональные данным.

$c_1 \parallel c_2 \parallel c_3 \parallel c_4$

$A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_2B_3 : B_3B_4$



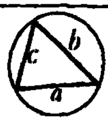
Площадь треугольника



$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$;

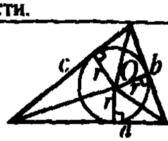
$S=\frac{1}{2}ab\sin\angle C=\frac{1}{2}bc\sin\angle A=\frac{1}{2}ac\sin\angle B$;

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$.



$S=\frac{abc}{4R}$,

где R – радиус описанной окружности.



$S=pr$,

где $p=\frac{a+b+c}{2}$, а r – радиус вписанной окружности.

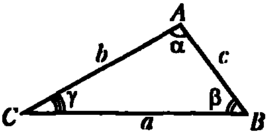
Метрические соотношения для треугольников

Сумма внутренних углов: $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$;

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta;$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

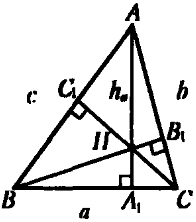
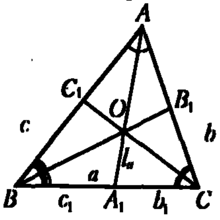
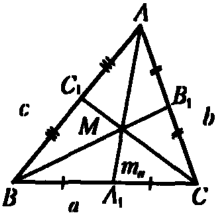


Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$,

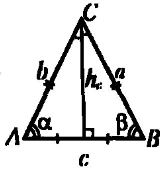
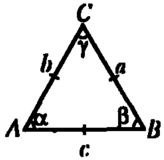
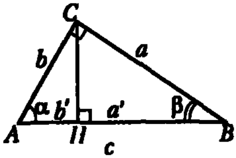
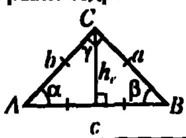
где R – радиус описанной окружности.

Неравенство треугольника: $a-b<c<a+b$; $b-c<a<b+c$; $a-c<b<a+c$.

Высоты, биссектрисы, медианы треугольника

	Высоты	**Биссектрисы**	**Медианы**
			
Точка пересе-чения	H – ортоцентр $BH\cdot HB_1=CH\cdot HC_1=$ $=AH\cdot HA_1$	**O – центр вписанной окружности** $\dfrac{AO}{OA_1}=\dfrac{b+c}{a}$; $\dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{a+c}{b}$; $\dfrac{CO}{OC_1}=\dfrac{a+b}{c}$	M – центр масс $\dfrac{AM}{MA_1}=\dfrac{BM}{MB_1}=$ $=\dfrac{CM}{MC_1}=\dfrac{2}{1}$
Длина	$h_a=b\sin C=c\sin B$; $h_a=\dfrac{2S}{a}$	$l_a=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$; $l_a=\dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$; $l_a^2=bc-b_1c_1$; $l_a^2=bc-\dfrac{bca^2}{(b+c)^2}$	$m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$
Свой-ства	$\Delta AB_1C_1\sim\Delta ABC$ с $k=\cos A$. $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$ $h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$	$\dfrac{c_1}{b_1}=\dfrac{c}{b}$; $\dfrac{S_{\Delta AA_1B}}{S_{\Delta AA_1C}}=\dfrac{AB}{AC}$; $b_1=\dfrac{ab}{b+c}$; $c_1=\dfrac{ac}{b+c}$	$S_{\Delta ABA_1}=S_{\Delta ACA_1}$; $S_{\Delta BMA_1}=\dfrac{1}{6}S_{\Delta ABC}$

Частные случаи треугольников

Вид треугольника	***Основные свойства и соотношения между элементами***
Равнобедренный 	$a=b;\ \alpha=\beta;$ $h_a=h_b=\frac{2S}{a};\ h_c=m_c=l_c=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2};$ $r=\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\ R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{c}{2\sin\gamma}$
Равносторонний 	$a=b=c;\ \alpha=\beta=\gamma=60^\circ;$ $h_a=h_b=h_c=m_a=m_b=m_c=l_a=l_b=l_c=\frac{a\sqrt{3}}{2};$ $r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\ R=\frac{a\sqrt{3}}{3};\ R=2r;\ S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Прямоугольный  **Пифагоровы тройки** 3:4:5 5:12:13 8:15:17 7:24:25	$\angle C=\alpha+\beta=90^\circ$; ***Теорема Пифагора:*** $c^2=a^2+b^2;$ $\Delta CBH \backsim \Delta ACH \backsim \Delta ABC;\ a^2=ca';\ b^2=cb';\ h_c^2=a'b';$ $\sin\alpha=\frac{a}{c}=\cos\beta;\ \cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta;$ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\operatorname{ctg}\beta;\ \operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha;$ $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2};\ m_b=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2};\ m_c=\frac{1}{2}c=R;$ $h_a=b;\ h_b=a;\ h_c=\frac{ab}{c}=\sqrt{a'b'};\ l_c=\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$ $r=\frac{a+b-c}{2};\ R=\frac{c}{2};\ R+r=\frac{a+b}{2};\ S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch_c$
Прямоугольный равнобедренный 	$\gamma=90^\circ;\ \alpha=\beta=45^\circ;\ a=b;\ c=a\sqrt{2};$ $m_a=m_b=\frac{a\sqrt{5}}{2};\ m_c=h_c=l_c=\frac{c}{2};$ $S=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}c^2$

Обозначения, используемые в таблице:

a, b, c – стороны треугольника ABC; α, β, γ – соответственно противолежащие этим сторонам углы;

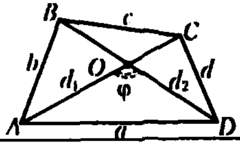
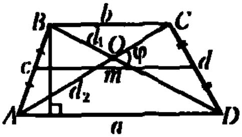
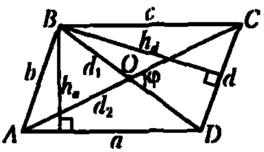
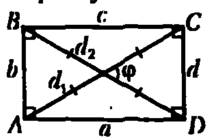
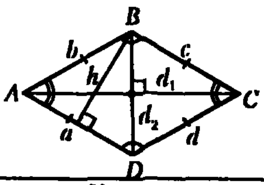
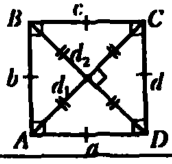
h_a, m_a, l_a – высота, медиана, биссектриса, проведенные к стороне a;

a' – проекция a на c; b' – проекция b на c;

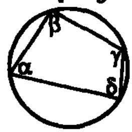
r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности;

S – площадь треугольника.

Четырехугольники

Вид четырехугольника	*Основные соотношения*	*Площадь*
Произвольный выпуклый 	$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$; $S_{\Delta AOB}\cdot S_{\Delta COD}=S_{\Delta BOC}\cdot S_{\Delta AOD}$	$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Трапеция 	$a\parallel b$; $m\parallel a$; $m\parallel b$; m – средняя линия; $m=\frac{a+b}{2}$; $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D=180^\circ$; $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACD}$; $S_{\Delta ABO}=S_{\Delta CDO}$; $S_{\Delta AOD}:S_{\Delta COB}=a^2:b^2$	$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$; $S=m\cdot h$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Параллелограмм 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=c$; $b=d$; $\angle A=\angle C$; $\angle B=\angle D$; $\angle A+\angle B=\angle B+\angle C=\angle C+\angle D=\angle D+\angle A=180^\circ$; $AO=OC$; $BO=OD$; $d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)$; $\Delta ABC=\Delta CDA$; $\Delta ABD=\Delta CDB$; $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta BOC}=S_{\Delta COD}=S_{DOA}$	$S=ah_a=dh_d$; $S=ab\sin\alpha$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Прямоугольник 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=c$; $b=d$; $a\perp b$; $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$; $d_1=d_2$; $d_1^2=a^2+b^2$; $R=\frac{d_1}{2}$ для произвольной точки E верно равенство $AE^2+EC^2=BE^2+ED^2$	$S=ab$; $S=\frac{1}{2}d_1^2\sin\varphi$
Ромб 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=b=c=d$; $\angle A=\angle C$; $\angle B=\angle D$; $d_1\perp d_2$; диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба; $r=\frac{h}{2}$	$S=ah$; $S=a^2\sin\alpha$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2$
Квадрат 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=b=c=d$; $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$; $d_1=d_2$; $d_1\perp d_2$; $d_1=a\sqrt{2}$; $r=\frac{a}{2}$, $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$S=a^2$; $S=\frac{1}{2}d_1^2$

Вписанные и описанные четырехугольники

Вписанный четырехугольник	Описанный четырехугольник
	
$\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$ $\Leftrightarrow$ ***четырехугольник вписан в окружность***	$a+c=b+d$ $\Leftrightarrow$ ***четырехугольник описан около окружности;*** $S=pr$, где $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$, r – радиус

Правильные многоугольники

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны между собой и все углы равны между собой.

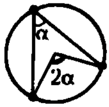
Обозначения:	
a_n – сторона,	$a_n=\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$
r_n – радиус вписанной окружности,	$r_n=\dfrac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}=R_n\cos\dfrac{180^\circ}{n}$
R_n – радиус описанной окружности, P_n – периметр,	$R_n=\dfrac{r_n}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}=\dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$
S_n – площадь, α_n – угол между смежными сторонами.	$S_n=\dfrac{n}{2}R_n^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}=\dfrac{n}{4}a_n^2\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}=\dfrac{1}{2}r_n\cdot P_n$

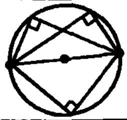
Формулы для правильных многоугольников с числом сторон 3, 4, 6, 8

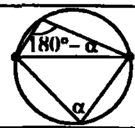
n	α	r	R	S	Соотношение между r и R
3	60°	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R=2r$
4	90°	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	a^2	$R=r\sqrt{2}$
6	120°	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R\sqrt{3}=2r$
8	135°	$\dfrac{a(1+\sqrt{2})}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$2a^2(1+\sqrt{2})$	$\dfrac{r}{R}=\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Элементы	***Правильный n-угольник*** ***вписанный в окружность радиуса*** R	 ***описанный около окружности радиуса*** r
Сторона	$a=2R\sin\dfrac{\pi}{n}$	$a=2r\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$
Периметр	$P=2nR\sin\dfrac{\pi}{n}$	$P=2nr\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$
Площадь	$S=\dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$	$S=nr^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$

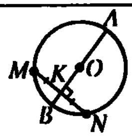
Центральные и вписанные углы



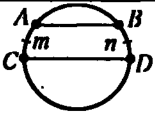




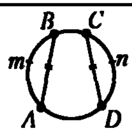
Свойства дуг и хорд



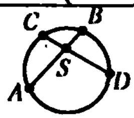
$(AB \perp MN) \Leftrightarrow (MK = KN)$



$(AB \parallel CD) \Leftrightarrow \left(\overset{N}{AmB} = \overset{N}{CnD}\right)$



$\left(\overset{N}{AmB} = \overset{N}{CnD}\right) \Leftrightarrow (AB = CD)$

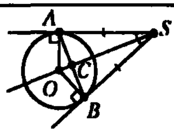


$AS \cdot SB = CS \cdot SD$

ΔASC и ΔDSB подобны

ΔASD и ΔBSC подобны

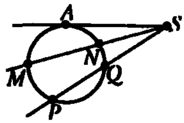
Свойства касательных и секущих



SA, SB – касательные,

$AS = SB$;

$\angle ASO = \angle BSO = \angle OAB = \angle OBA$

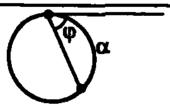


SM, SP – секущие, SA – касательная,

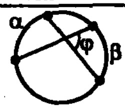
$SM \cdot SN = SP \cdot SQ$; $SM \cdot SN = SA^2$;

$\Delta SAN \sim \Delta SMA$; $\Delta SNQ \sim \Delta SPM$

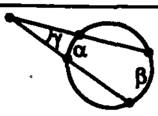
Углы между хордами, касательными и секущими



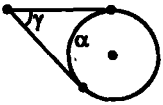
$\varphi = \dfrac{\alpha}{2}$



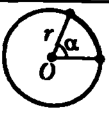
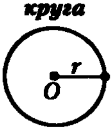
$\varphi = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$



$\gamma = \dfrac{1}{2}(\beta - \alpha)$

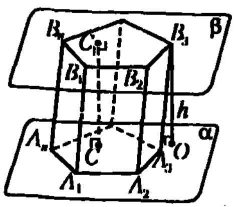


$\gamma = 180° - \alpha$

Длина дуги (l) и окружности (L)	*Площадь*	
	круга	*сектора*
 $l = \dfrac{\pi r \alpha°}{180°}$ – длина дуги величины α градусов и радиуса r. $L = 2\pi r$ – длина окружности радиуса r	 $S = \pi r^2$ – площадь круга радиуса r	 $S = \dfrac{\pi r^2 \alpha°}{360°}$ – площадь сектора с углом α градусов и радиуса r

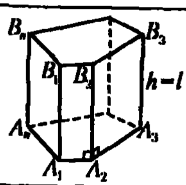
СТЕРЕОМЕТРИЯ

Многогранники



Призма

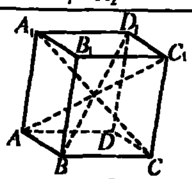
- основания призмы – равные многоугольники $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$;
- основания призмы расположены в параллельных плоскостях α и β;
- боковые грани призмы: $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ – параллелограммы;
- A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n – боковые ребра;
- боковые ребра призмы равны и лежат на параллельных прямых;
- высота призмы h (например, CC_1 или B_3O) – отрезок перпендикуляра между параллельными плоскостями α и β;
- $S_{бок.} = S_{A_1A_2B_2B_1} + S_{A_2A_3B_3B_2} + ... + S_{A_1A_nB_nB_1}$ – площадь боковой поверхности;
- $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$ – *площадь полной поверхности;*
- $V = S_{осн.} \cdot h$ – объем призмы.



Прямая призма

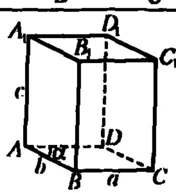
- боковые ребра прямой призмы перпендикулярны основаниям;
- боковые грани прямой призмы – прямоугольники;
- высота прямой призмы равна боковому ребру.

Правильная призма – <u>прямая призма</u>, основания которой – правильные многоугольники.



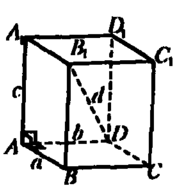
Параллелепипед – призма, основания которой – параллелограммы.

- диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам;
- противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.



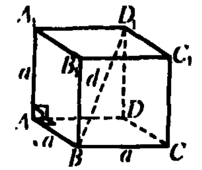
Прямой параллелепипед – прямая призма, основания которой – параллелограммы.

- боковые ребра прямого параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания ($ABCD$ – параллелограмм);
- боковые грани прямого параллелепипеда – прямоугольники.



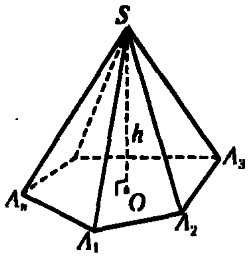
Прямоугольный параллелепипед – прямой параллелепипед, основания которого – прямоугольники.

- все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками;
- все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны и $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$;
- $S = 2(ab + ac + bc)$ – площадь полной поверхности;
- $V = abc$ – объем прямоугольного параллелепипеда.



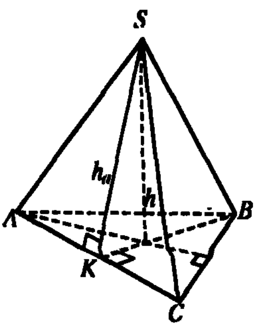
Куб – прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны между собой.

- все грани куба – равные квадраты;
- $d = a\sqrt{3}$ – диагональ куба с ребром a;
- $S = 6a^2$ – площадь полной поверхности куба с ребром a;
- $V = a^3$ – объем куба.



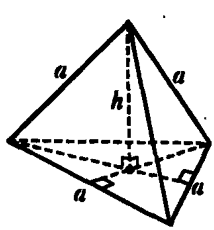
Пирамида

- основание пирамиды – многоугольник $A_1A_2...A_n$;
- боковые грани пирамиды: A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 – треугольники;
- A_1S, A_2S, A_3S, ..., A_nS – боковые ребра;
- точка S – вершина пирамиды;
- высота пирамиды h (SO) – отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость основания;
- $S_{бок.} = S_{\Delta A_1SA_2} + S_{\Delta A_2SA_3} + ... + S_{\Delta A_nSA_1}$ – площадь боковой поверхности;
- $S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}$ – площадь полной поверхности;
- $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$ – объем пирамиды.



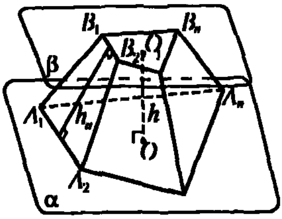
Правильная пирамида

- основание – правильный многоугольник;
- отрезок, соединяющий центр основания с вершиной пирамиды, является ее высотой;
- все боковые ребра равны;
- все боковые грани – равные равнобедренные треугольники;
- все двугранные углы при ребрах основания равны;
- все плоские углы при вершине равны;
- все двугранные углы при боковых ребрах равны;
- апофема h_a – высота боковой грани (например, SK), проведенная к основанию; все апофемы равны;
- $S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot h_a$ – площадь боковой поверхности.



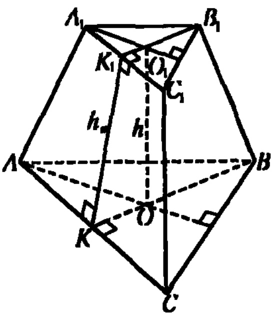
Тетраэдр (правильный тетраэдр) – треугольная пирамида, все грани которой – правильные треугольники.

- $h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ – высота;
- $R = \frac{3h}{4}$ – радиус описанной сферы;
- $r = \frac{h}{4}$ – радиус вписанной сферы;
- $S_{полн.} = a^2\sqrt{3}$ – площадь полной поверхности;
- $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ – объем тетраэдра.



Усеченная пирамида

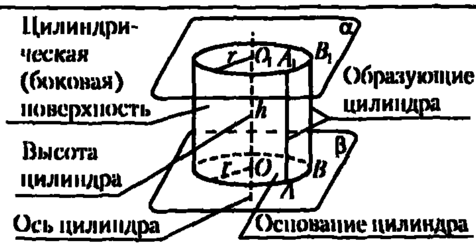
- основания усеченной пирамиды – подобные многоугольники $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$;
- основания усеченной пирамиды расположены в параллельных плоскостях α и β;
- боковые грани усеченной пирамиды: $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3, ..., A_nB_nB_1A_1$ – трапеции;
- A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, ..., A_nB_n$ – боковые ребра;
- высота усеченной пирамиды h (OO_1) – отрезок перпендикуляра между параллельными плоскостями α и β;
- h_n – высота боковой грани $A_1B_1B_2A_2$;
- $V_{\text{ус.пир.}} = \frac{h}{3}\cdot\left(S_{\text{верх.}} + S_{\text{нижн.}} + \sqrt{S_{\text{верх.}}\cdot S_{\text{нижн.}}}\right)$ – объем усеченной пирамиды.



Правильная усеченная пирамида

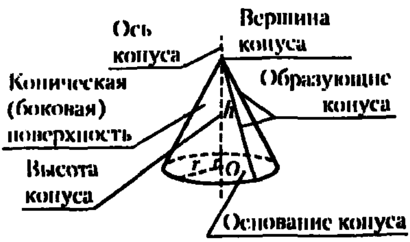
- основания правильной усеченной пирамиды – правильные подобные многоугольники;
- все боковые ребра равны;
- все боковые грани – равные равнобедренные трапеции;
- отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1), является высотой h правильной усеченной пирамиды;
- апофема h_n – высота боковой грани (например, KK_1); все апофемы равны.

Тела вращения



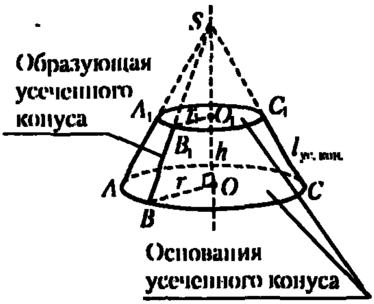
Цилиндр

- r – радиус окружностей оснований цилиндра;
- отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1), является высотой h цилиндра;
- длина высоты цилиндра равна длине образующей цилиндра;
- $S = 2\pi rh$ – площадь боковой поверхности;
- $S = 2\pi r(r+h)$ – площадь полной поверхности;
- $V = \pi r^2 h$ – объем цилиндра.



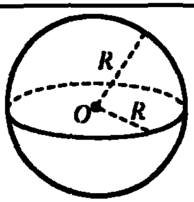
Конус

- r – радиус окружности основания конуса;
- отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания, является образующей l конуса;
- отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания, является высотой h конуса;
- $S = \pi r l$ – площадь боковой поверхности;
- $S = \pi r(r + l)$ – площадь полной поверхности, где l – образующая конуса.
- $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ – объем конуса.



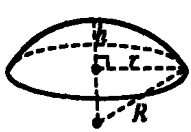
Усеченный конус

- r и r_1 – радиусы соответственно большего и меньшего оснований усеченного конуса;
- отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1), является высотой h усеченного конуса;
- l – образующая усеченного конуса (например BB_1 или CC_1);
- $S = \pi(r + r_1)l$ – площадь боковой поверхности усеченного конуса;
- $S = \pi(r + r_1)l + \pi r^2 + \pi r_1^2$ – площадь полной поверхности усеченного конуса.
- $V = \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r_1^2 + r \cdot r_1\right)$ – объем усеченного конуса.



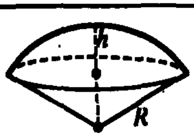
Шар

- R – радиус шара;
- $S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности (площадь сферы);
- $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объем шара.



Шаровой сегмент

- r – радиус основания шарового сегмента;
- R – радиус шара;
- h – высота шарового сегмента;
- $S = 4\pi Rh$ – площадь сферической части поверхности шарового сегмента;
- $V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$ – объем шара.



Шаровой сектор

- R – радиус шара;
- h – высота шарового сегмента;
- $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ – объем шарового сектора.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Таблица производных

$(C)'=0$, где C – константа $(kx+b)'=k$	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(e^x)'=e^x$ $(a^x)'=a^x\ln a$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
$(x^n)'=nx^{n-1}$ В частности: $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$		

Правила нахождения производных

$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$	$(C\cdot f(x))'=C\cdot f'(x)$, где C – константа
$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$(f(g(x)))'=f'(g)\cdot g'(x)$	

Прямая, проходящая через две заданные точки

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$;	$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$;

Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной

$-\frac{1}{k}$ угловой коэффициент прямой, перпендикулярной прямой $y=kx+b$.

Касательная к графику функции $f(x)$

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ – уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0	$f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0

Использованная литература

1. Учебники для 5–11 классов по математике для средних общеобразовательных учреждений.
2. Математика: материалы централиз. тестирования с решениями и коммент.: пособие для подгот. к тестированию / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: РИКЗ; Мозырь: ООО ИД "Белый ветер", 2005.
3. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестиров / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2006.
4. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестиров. / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2007.
5. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестиров. / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2008.
6. ЕГЭ 2008. Математика. Федеральный банк экзаменационных материалов / авт.-сост. Л. О. Денищева, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов, И. Н. Сергеев. – Москва: Эксмо, 2008.
7. Бурда М. И. и др. Сборник заданий для государственной итоговой аттестации по алгебре. 9 класс.– Харьков: Гимназия, 2007.
8. Сборник заданий для государственной итоговой аттестации по математике. 11класс: в 2 кн. Кн. 1 / М. И. Бурда, О. Я. Белянина, О. П. Вашуленко и др.– Харьков: Гимназия, 2008.
9. Сборник заданий для государственной итоговой аттестации по математике. 11 класс: в 2 кн. Кн. 2 / М. И. Бурда, О. Я. Белянина, О. П. Вашуленко и др.– Харьков: Гимназия, 2008.