

191—210. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования, построить ее график.

$$193. y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

1.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)}$$

Область определения:  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ .

Найдем значение функции в граничных точках:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2}{-2 * (x+1)} = - \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = - \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

2. Функция неперiodическая.

3. Четность \ нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = y(x)$$

Следовательно, функция четная.

4.

Асимптоты параллельные оси  $Oy$ :  $x = -1$  и  $x = 1$ .

Найдем асимптоты не параллельные оси  $Oy$ .

Пусть уравнение асимптоты

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1) * x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$$

Таким образом при  $x \rightarrow \pm\infty$  уравнение асимптоты  $y = 1$ .

5. Найдем промежутки монотонности, точки минимума, максимума.

$$y' = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) * 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 0$$

Точка экстремума:

$$x = 0 \quad y(0) = -1$$

Т. к. знаменатель  $y'$  для любых  $x$  из области определения положителен, то:

$$\text{при } x < 0 \quad y' > 0$$

$$\text{при } x > 0 \quad y' < 0$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y'$	+		+	0	-		-
y	возрастает	точка разрыва	возрастает	-1, точка максимума	убывает	точка разрыва	убывает

6. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости.

$$y'' = -\frac{4(x^2 - 1)^2 - 4x * 2(x^2 - 1) * 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Т. к.  $12x^2 + 4 > 0$ , то:

$$\text{при } x < -1 \text{ и при } x > 1 \quad y'' > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{график функции вогнутый}$$

$$\text{при } -1 < x < 1 \quad y'' < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{график функции выпуклый}$$

7. Построение графика

x	0	0,5	1,5	2	3	10
y	-1	$\approx -1,7$	2,6	$\approx 1,7$	1,25	$\approx 1$

При построении учитываем, что функция четная, следовательно, график функции симметричен относительно оси  $Oy$ .

